GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Typisierung

Teil 2

Prof Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2024/25

Stand der Folien: 28. Januar 2025

Typisierung rekursiver Superkombinatoren

Typisierung rekursiv definierter Superkombinatoren

1. *Iteratives Verfahren*
2. *Hindley-Milner Verfahren*
3. *Diskussion Erweiterungen*

Rekursive Superkombinatoren

Beispiel

```
reverse xs           = reverseStack xs []
reverseStack xs stack =
       case xs of [] -> stack
                  (y:ys) -> reverseStack ys (y:stack)
```


Rekursive Superkombinatoren

Definition (direkt rekursiv, rekursiv, verschränkt rekursiv)

- Sei $\mathcal{SK}$ eine Menge von Superkombinatoren
- Für $SK_i, SK_j \in \mathcal{SK}$ sei

$$SK_i \preceq SK_j$$

  gdw. SK_j den Superkombinator SK_i im Rumpf benutzt.
- $\preceq^+$: transitiver Abschluss von $\preceq$ ($\preceq^*$: reflexiv-transitiver Abschluss)
- SK_i ist direkt rekursiv wenn $SK_i \preceq SK_i$ gilt.
- SK_i ist rekursiv wenn $SK_i \preceq^+ SK_i$ gilt.
- $SK_1, \ldots, SK_m$ sind verschränkt rekursiv, wenn $SK_i \preceq^+ SK_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$

Typisierung von nicht-rekursiven Superkombinatoren

- Nicht-rekursive Superkombinatoren kann man wie Abstraktionen typisieren
- Notation: $A \vdash_T SK :: \tau$, bedeutet: unter Annahme A kann man SK mit Typ τ typisieren

Typisierungsregel für (geschlossene) nicht-rekursive SK:

$$\text{(RSK1)}\ \frac{A \cup \{x_1 :: \alpha_1, \ldots, x_n :: \alpha_n\} \vdash s :: \tau, E}{A \vdash_T SK :: \forall \mathcal{X}.\sigma(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \tau)}$$

wenn σ Lösung von E,

$SK\ x_1\ \ldots\ x_n = s$ die Definition von SK

und SK nicht rekursiv ist,

und $\mathcal{X}$ die Typvariablen in $\sigma(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \tau)$

τ-Notation: τ steht für einen Typ innerhalb der Berechnung

Beispiel: Typisierung von (.)

```
(.) f g x = f (g x)      ; nicht-rekursiv.
```

A_0 ist leer, da keine Konstruktoren oder SK vorkommen.
wobei $A_1 = \{f :: \alpha_1, g :: \alpha_2, x :: \alpha_3\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(AxV)}}{A_1 \vdash f :: \alpha_1, \emptyset}\ ,\ \dfrac{\overset{\text{(AxV)}}{A_1 \vdash g :: \alpha_2, \emptyset}\ ,\ \overset{\text{(AxV)}}{A_1 \vdash x :: \alpha_3, \emptyset}}{A_1 \vdash (g\ x) :: \alpha_5, \{\alpha_2 \doteq \alpha_3 \to \alpha_5\}}\ \text{(RApp)}}{A_1 \vdash (f\ (g\ x)) :: \alpha_4, \{\alpha_2 \doteq \alpha_3 \to \alpha_5, \alpha_1 = \alpha_5 \to \alpha_4\}}\ \text{(RApp)}}{\emptyset \vdash_T (.) :: \forall \mathcal{X}.\sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_4)}\ \text{(RSK1)}$$

Unifikation ergibt $\sigma = \{\alpha_2 \mapsto (\alpha_3 \to \alpha_5), \alpha_1 \mapsto (\alpha_5 \to \alpha_4)\}$.
Daher: $\sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_4) = (\alpha_5 \to \alpha_4) \to (\alpha_3 \to \alpha_5) \to \alpha_3 \to \alpha_4$

Jetzt kann man $\mathcal{X} = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ berechnen, und umbenennen:

$$(.) :: \forall a, b, c.(a \to b) \to (c \to a) \to c \to b$$

Typisierung von rekursiven Superkombinatoren

- Sei $SK\ x_1\ \ldots\ x_n = e$
- und SK kommt in e vor, d.h. SK ist rekursiv
- Warum kann man SK nicht ganz einfach typisieren?
- Will man den Rumpf e mit dem normalen Verfahren typisieren, dann muss man den Typ von SK schon kennen!
- Also iterieren und mit allgemeinstem Typ anfangen

Idee des Iterativen Typisierungsverfahrens

- Gebe SK zunächst den allgemeinsten Typ (d.h. eine Typvariable) und typisiere den Rumpf unter Benutzung dieses Typs
- Man erhält anschließend einen neuen Typ für SK
- Mache mit neuem (quantifizierten) Typ im Rumpf weiter und iteriere ddie Typisierung
- Stoppe, wenn neuer Typ = alter Typ
- Dann hat man eine konsistente Typannahme gefunden; Diese ist dann der allgemeinste Typ.

Allgemeinster Typ: Typ T so dass $\mathrm{sem}(T) = \{\text{alle Grundtypen}\}$.
Das liefert der Typ α (bzw. quantifiziert $\forall\alpha.\alpha$)

Iteratives Typisierungsverfahren

Regel zur Berechnung neuer Typ-Annahmen:

$$(\text{SKR}_{\text{EK}})\ \frac{A \cup \{x_1 :: \alpha_1, \ldots, x_n :: \alpha_n\} \vdash s :: \tau, E}{A \vdash_T SK :: \sigma(\alpha_1 \to \ldots \alpha_n \to \tau)}$$

wenn $SK\ x_1\ \ldots\ x_n = s$ die Definition von SK, σ Lösung von E

Genau wie RSK1, aber in A muss es eine Annahme für SK geben.

(Iteratives) Typisierungsverfahren:

Die folgende Analyse der Aufrufhierarchie der Superkombinatoren kann im Typisierungsverfahren Iteration vermeiden
!wird in Haskell gebraucht!

(Im iterativen Typisierungsverfahren
wäre es "nur" eine Optimierung.)

Iteratives Typisierungsverfahren

Optimierung bzw Vermeidung der Iteration:
Analyse der verschränkten Rekursion:

- Abhängigkeitsanalyse der Superkombinatoren
- Berechnung der starken Zusammenhangskomponenten im Aufrufgraph
- Sei $\simeq$ die Äquivalenzrelation passend zu $\preceq^+$, dann sind die starken Zusammenhangskomponenten gerade die Äquivalenzklassen zu $\simeq$.
- Jede Äquivalenzklasse wird gemeinsam typisiert

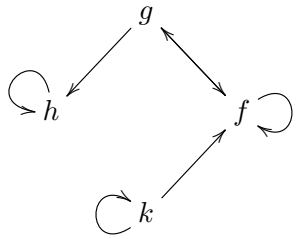
Typisierung der Klassen entsprechend der $\preceq^+$-Ordnung modulo $\simeq$.

Typisierungsverfahren: Beispiel zur Rekursion

Beispiel:

```
f x y = if x<=1 then y else f (x-y) (y + g x)
g x   = if x==0 then (f 1 x) + (h 2) else 10
h x   = if x==1 then 0 else h (x-1)
k x y = if x==1 then y else k (x-1) (y+(f x y))
```

Der Aufrufgraph (nur bzgl. `f,g,h,k`) ist



Die Äquivalenzklassen (mit Ordnung) sind $\{h\} \preceq^+ \{f, g\} \preceq^+ \{k\}$.

Iteratives Typisierungsverfahren: Der Algorithmus

Iterativer Typisierungsalgorithmus

Eingabe: Menge von verschränkt rekursiven Superkombinatoren $SK_1, \ldots, SK_m$ wobei "kleinere" SK's schon typisiert; (keine freien Variablen)

1. Anfangsannahme A enthält Typen der Konstruktoren der bereits bekannten Superkombinatoren
2. $A_0 := A \cup \{SK_1 :: \forall\alpha_1.\alpha_1, \ldots, SK_m :: \forall\alpha_m.\alpha_m\}$ und $j = 0$.
3. Verwende für jeden Superkombinator SK_i (mit $i = 1, \ldots, m$) die Regel (SKRek) und Annahme A_j, um SK_i zu typisieren.
4. Wenn Typisierungen erfolgreich, d.h. für alle i: $A_j \vdash_T SK_i :: \tau_i$
   Dann allquantifiziere: $SK_1 :: \forall\mathcal{X}_1.\tau_1, \ldots, SK_m :: \forall\mathcal{X}_m.\tau_m$
   Setze $A_{j+1} := A \cup \{SK_1 :: \forall\mathcal{X}_1.\tau_1, \ldots, SK_m :: \forall\mathcal{X}_m.\tau_m\}$
5. Wenn $A_j \neq A_{j+1}$ (=: Gleichheit bis auf Umbenennung), dann gehe mit $j := j + 1$ zu Schritt (3).
   Anderenfalls, d.h. wenn $A_j = A_{j+1}$, war A_j konsistent; die Typen der SK_i sind entsprechend in A_j zu finden.
   Ausgabe Die allquantifizierten polymorphen Typen der SK_i

Wenn `Fail` auftritt, dann sind $SK_1, \ldots, SK_m$ nicht typisierbar.

Eigenschaften des Algorithmus

- Die berechneten Typen pro Iterationsschritt sind eindeutig bis auf Umbenennung.
  $\Longrightarrow$ bei Terminierung liefert der Algorithmus eindeutige Typen.
- Pro Iteration werden die neuen Typen spezieller (oder bleiben gleich).
  D.h. Monotonie bzgl. der Grundtypensemantik:
  $\mathrm{sem}(T_j) \supseteq \mathrm{sem}(T_{j+1})$
- Bei Nichtterminierung gibt es keinen polymorphen Typ.
  Grund: Monotonie und man hat mit größten Annahmen begonnen.
  Und: "unendlicher" Schnitt ist leer.
- Das iterative Verfahren berechnet einen größten Fixpunkt (bzgl. der Grundtypensemantik): Menge wird solange verkleinert, bis sie sich nicht mehr ändert.
  D.h. es wird der *allgemeinste* polymorphe Typ berechnet

Beispiele: length (1)

$$\texttt{length}\ xs = \texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\{\texttt{Nil} \to 0; (y : ys) \to 1 + \texttt{length}\ ys\}$$

Annahme:

$A = \{\texttt{Nil} :: \forall a.[a], (:) :: \forall a.a \to [a] \to [a], 0, 1 :: \texttt{Int}, (+) :: \texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int}\}$

1.Iteration: $A_0 = A \cup \{\texttt{length} :: \forall\alpha.\alpha\}$

$$\dfrac{\begin{array}{ll}(a) & A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash xs :: \tau_1, E_1\\ (b) & A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash \texttt{Nil} :: \tau_2, E_2\\ (c) & A_0 \cup \{xs :: \alpha_1, y :: \alpha_4, ys :: \alpha_5\} \vdash (y : ys) :: \tau_3, E_3\\ (d) & A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash 0 :: \tau_4, E_4\\ (e) & A_0 \cup \{xs :: \alpha_1, y :: \alpha_4, ys :: \alpha_5\}\} \vdash (1 + \texttt{length}\ ys) :: \tau_5, E_5\end{array}}{\dfrac{A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash (\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\{\texttt{Nil} \to 0; (y : ys) \to 1 + \texttt{length}\ xs\}) :: \alpha_3,\ E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup \{\tau_1 \doteq \tau_2, \tau_1 \doteq \tau_3, \alpha_3 \doteq \tau_4, \alpha_3 \doteq \tau_5\}}{A_0 \vdash_T \texttt{length} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_3)}\ (\text{SKRek})}\ (\text{RCase})$$

wobei σ Lösung von

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup \{\tau_1 \doteq \tau_2, \tau_1 \doteq \tau_3, \alpha_3 \doteq \tau_4, \alpha_3 \doteq \tau_5\}$$

Beispiele: length (2)

(a): $\dfrac{}{A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash xs :: \alpha_1, \emptyset}\ (\text{AxV})$

D.h $\tau_1 = \alpha_1$ und $E_1 = \emptyset$

(b): $\dfrac{}{A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_6], \emptyset}\ (\text{AxK})$

D.h. $\tau_2 = [\alpha_6]$ und $E_2 = \emptyset$

(c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash (:) :: \alpha_9 \to [\alpha_9] \to [\alpha_9], \emptyset}\ (\text{AxK}) \quad , \quad \dfrac{}{A_0' \vdash y :: \alpha_4, \emptyset}\ (\text{AxV})}{A_0' \vdash ((:)\ y) :: \alpha_8, \{\alpha_9 \to [\alpha_9] \to [\alpha_9] \doteq \alpha_4 \to \alpha_8\}}\ (\text{RApp}) \quad , \quad \dfrac{}{A_0' \vdash ys :: \alpha_5, \emptyset}\ (\text{AxV})}{A_0' \vdash (y : ys) :: \alpha_7, \{\alpha_9 \to [\alpha_9] \to [\alpha_9] \doteq \alpha_4 \to \alpha_8, \alpha_8 \doteq \alpha_5 \to \alpha_7\}}\ (\text{RApp})$$

wobei $A_0 = A_0 \cup \{xs :: \alpha_1, y :: \alpha_4, ys :: \alpha_5\}$

D.h. $\tau_3 = \alpha_7$ und $E_3 = \{\alpha_9 \to [\alpha_9] \to [\alpha_9] \doteq \alpha_4 \to \alpha_8, \alpha_8 \doteq \alpha_5 \to \alpha_7\}$

Beispiele: length (3)

(d) $\dfrac{(\text{AxK})}{A_0 \cup \{xs :: \alpha_1\} \vdash 0 :: \texttt{Int}, \emptyset}$

D.h. $\tau_4 = \texttt{Int}$ und $E_4 = \emptyset$

(e)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{AxK})}{A_0' \vdash (+) :: \texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int}, \emptyset} \quad \dfrac{(\text{AxK})}{A_0' \vdash 1 :: \texttt{Int}, \emptyset}}{A_0' \vdash ((+)\ 1) :: \alpha_{11}, \{\texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int} \doteq \texttt{Int} \to \alpha_{11}\}} (\text{RApp}) \quad \dfrac{(\text{AxSK})}{A_0' \vdash \texttt{length} :: \alpha_{13}, \emptyset} \quad \dfrac{(\text{AxV})}{A_0' \vdash (ys) :: \alpha_5, \emptyset}}{A_0' \vdash (1 + \texttt{length}\ ys) :: \alpha_{10}, \{\texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int} \doteq \texttt{Int} \to \alpha_{11}, \alpha_{13} \doteq \alpha_5 \to \alpha_{12}, \alpha_{11} \doteq \alpha_{12} \to \alpha_{10}\}} (\text{RApp})$$

wobei $A_0 = A_0 \cup \{xs :: \alpha_1, y :: \alpha_4, ys :: \alpha_5\}$

D.h. $\tau_5 = \alpha_{10}$ und

$E_5 = \{\texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int} \doteq \texttt{Int} \to \alpha_{11}, \alpha_{13} \doteq \alpha_5 \to \alpha_{12}, \alpha_{11} \doteq \alpha_{12} \to \alpha_{10}\}$

Beispiele: length (3)

Zusammengefasst:

$$A_0 \vdash_T \texttt{length} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_3)$$

wobei σ Lösung von

$\{\alpha_9 \to [\alpha_9] \to [\alpha_9] \doteq \alpha_4 \to \alpha_8, \alpha_8 \doteq \alpha_5 \to \alpha_7,$
$\texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int} \doteq \texttt{Int} \to \alpha_{11}, \alpha_{13} \doteq \alpha_5 \to \alpha_{12}, \alpha_{11} \doteq \alpha_{12} \to \alpha_{10},$
$\alpha_1 \doteq [\alpha_6], \alpha_1 \doteq \alpha_7, \alpha_3 \doteq \texttt{Int}, \alpha_3 \doteq \alpha_{10}\}$

Die Unifikation ergibt als Unifikator

$\{\alpha_1 \mapsto [\alpha_9], \alpha_3 \mapsto \texttt{Int}, \alpha_4 \mapsto \alpha_9, \alpha_5 \mapsto [\alpha_9], \alpha_6 \mapsto \alpha_9, \alpha_7 \mapsto [\alpha_9], \alpha_8 \mapsto [\alpha_9] \to [\alpha_9],$
$\alpha_{10} \mapsto \texttt{Int}, \alpha_{11} \mapsto \texttt{Int} \to \texttt{Int}, \alpha_{12} \mapsto \texttt{Int}, \alpha_{13} \mapsto [\alpha_9] \to \texttt{Int}\}$

daher $\sigma(\alpha_1 \to \alpha_3) = [\alpha_9] \to \texttt{Int}$

$A_1 = A \cup \{\texttt{length} :: \forall\alpha.[\alpha] \to \texttt{Int}\}$

Da $A_0 \neq A_1$ muss man mit A_1 erneut iterieren.
2.Iteration: Ergibt den gleichen Typ, daher war A_1 konsistent.

Iterative Typiserung von length, vereinfacht

$\texttt{length}\ xs = \texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\{\texttt{Nil} \to 0; (y : ys) \to 1 + \texttt{length}\ ys\}$

1.Iteration: $A_0 = A \cup \{\texttt{length} :: \forall\alpha.\alpha\}$
bekannt: $\{\texttt{Nil} :: \forall a.[a], (:) :: \forall a.a \to [a] \to [a], 0, 1 :: \texttt{Int}, (+) :: \texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int}\}$

Bedingungen ergeben:

- $xs :: [\alpha]$
- $\texttt{length}\ ys$ hat keine Beschränkungen;
  Also: $(\texttt{case}\ldots) :: \texttt{Int}$.
- Erste Iteration: $\texttt{length} :: [\alpha] \to \texttt{Int}$.

Iterative Typiserung von length, vereinfacht

Zweiter Schritt: mit $\texttt{length} :: (\forall\alpha : [\alpha] \to \texttt{Int})$ im Rumpf

$\texttt{length}\ xs = \texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\{\texttt{Nil} \to 0; (y : ys) \to 1 + \texttt{length}\ ys\}$

2.Iteration: $A_1 = A \cup \{\texttt{length} :: \forall\alpha.[\alpha] \to \texttt{Int}\}$
bekannt: $\{\texttt{Nil} :: \forall a.[a], (:) :: \forall a.a \to [a] \to [a], 0, 1 :: \texttt{Int}, (+) :: \texttt{Int} \to \texttt{Int} \to \texttt{Int}\}$

Bedingungen ergeben:

- $xs :: [\alpha]$
- $\texttt{length}\ ys$ erzwingt: $ys :: [\alpha]$; und dann $y :: \alpha$.
  Alle Typen passen!
  Also: $(\texttt{case}\ldots) :: \texttt{Int}$.
- Zweite Iteration ergibt ebenfalls: $\texttt{length} :: [\alpha] \to \texttt{Int}$.
  Und das war die Annahme. Also Fixpunkt gefunden.

Iteratives Verfahren ist allgemeiner als Haskell

Beispiel

```
g x = 1 : (g (g 'c'))
```

$A = \{1 :: \texttt{Int}, \texttt{Cons} :: \forall a.a \to [a] \to [a], \texttt{'c'} :: \texttt{Char}\}$
$A_0 = A \cup \{\texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha\}$ (und $A_0' = A_0 \cup \{x :: \alpha_1\}$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset}(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_0' \vdash 1 :: \texttt{Int}, \emptyset}(\text{AxK})}{A_0' \vdash (\texttt{Cons}\ 1) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3}(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{g} :: \alpha_6, \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{g} :: \alpha_8, \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}(\text{AxK})}{A_0' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7\}}(\text{RApp})}{A_0' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}(\text{RApp})}{A_0' \vdash \texttt{Cons}\ 1\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}(\text{RApp})}{A_0 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2) = \alpha_1 \to [\texttt{Int}]}(\text{SKRek})$$

wobei $\sigma = \{\alpha_2 \mapsto [\texttt{Int}], \alpha_3 \mapsto [\texttt{Int}] \to [\texttt{Int}], \alpha_4 \mapsto [\texttt{Int}], \alpha_5 \mapsto \texttt{Int}, \alpha_6 \mapsto \alpha_7 \to [\texttt{Int}], \alpha_8 \mapsto \texttt{Char} \to \alpha_7\}$ die Lösung von $\{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}$ ist.

D.h. $A_1 = A \cup \{\texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha \to [\texttt{Int}]\}$.

Nächste Iteration zeigt: A_1 ist konsistent.

Iteratives Verfahren ist allgemeiner als Haskell (2)

Beachte: Für die Funktion g kann Haskell keinen Typ herleiten:

```
Prelude> let g x = 1:(g(g 'c'))

<interactive>:1:13:
Couldn't match expected type `[t]' against inferred type `Char'
      Expected type: Char -> [t]
      Inferred type: Char -> Char
    In the second argument of `(:)', namely `(g (g 'c'))'
    In the expression: 1 : (g (g 'c'))
```

Aber: Haskell kann den Typ verifizieren, wenn man ihn angibt:

```
let g::a -> [Int]; g x = 1:(g(g 'c'))
Prelude> :t g
g :: a -> [Int]
```

Grund: Wenn Typ vorhanden, führt Haskell keine Typinferenz durch, sondern verifiziert nur die Annahme.
g wird im Rumpf wie bereits typisiert behandelt.

Bsp.: Mehrere Iterationen sind nötig (1)

```
g x = x : (g (g 'c'))
```

- $A = \{\texttt{Cons} :: \forall a.a \to [a] \to [a], \texttt{'c'} :: \texttt{Char}\}$.
- $A_0 = A \cup \{\texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset}(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_0' \vdash x :: \alpha_1, \emptyset}(\text{AxV})}{A_0' \vdash (\texttt{Cons}\ x) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3}(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{g} :: \alpha_6, \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{g} :: \alpha_8, \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{}{A_0' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}(\text{AxK})}{A_0' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7\}}(\text{RApp})}{A_0' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}(\text{RApp})}{A_0' \vdash \texttt{Cons}\ x\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}(\text{RApp})}{A_0 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2) = \alpha_5 \to [\alpha_5]}(\text{SKRek})$$

wobei $\sigma = \{\alpha_1 \mapsto \alpha_5, \alpha_2 \mapsto [\alpha_5], \alpha_3 \mapsto [\alpha_5] \to [\alpha_5], \alpha_4 \mapsto [\alpha_5], \alpha_6 \mapsto \alpha_7 \to [\alpha_5], \alpha_8 \mapsto \texttt{Char} \to \alpha_7\}$ die Lösung von $\{\alpha_8 \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}$ ist.

D.h. $A_1 = A \cup \{\texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha \to [\alpha]\}$.

Bsp.: Mehrere Iterationen sind nötig (2)

Da $A_0 \neq A_1$ muss eine weitere Iteration durchgeführt werden.
mit $\texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha \to [\alpha]$

```
g x = x : (g (g 'c'))
```

Sei $A_1' = A_1 \cup \{x :: \alpha_1\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset}(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_1' \vdash x :: \alpha_1, \emptyset}(\text{AxV})}{A_1' \vdash (\texttt{Cons}\ x) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3}(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A_1' \vdash \texttt{g} :: \alpha_6 \to [\alpha_6], \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1' \vdash \texttt{g} :: \alpha_8 \to [\alpha_8], \emptyset}(\text{AxSK}) \quad \dfrac{}{A_1' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}(\text{AxK})}{A_1' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{\alpha_8 \to [\alpha_8] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \to [\alpha_6] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}(\text{RApp})}{A_1' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{\alpha_8 \to [\alpha_8] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \to [\alpha_6] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}(\text{RApp})}{A_1' \vdash \texttt{Cons}\ x\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{\alpha_8 \to [\alpha_8] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \to [\alpha_6] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4 \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}(\text{RApp})}{A_1 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2) = [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]]}(\text{SKRek})$$

wobei $\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [\texttt{Char}], \alpha_2 \mapsto [[\texttt{Char}]], \alpha_3 \mapsto [[\texttt{Char}]] \to [[\texttt{Char}]], \alpha_4 \mapsto [[\texttt{Char}]], \alpha_5 \mapsto [\texttt{Char}], \alpha_6 \mapsto [\texttt{Char}], \alpha_7 \mapsto [\texttt{Char}], \alpha_8 \mapsto \texttt{Char}\}$
die Lösung von $\{\alpha_8 \to [\alpha_8] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \alpha_6 \to [\alpha_6] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}$ ist.

Daher ist $A_2 = A \cup \{\texttt{g} :: [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]]\}$.

Bsp.: Mehrere Iterationen sind nötig (3)

```
g x = x : (g (g 'c'))
```

Da $A_1 \neq A_2$ muss eine weitere Iteration durchgeführt werden:
Sei $A_2' = A_2 \cup \{x :: \alpha_1\} \quad = A \cup \{\texttt{g} :: [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]], x :: \alpha_1\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{AxK})\ A_2' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset \quad , \quad (\text{AxV})\ A_2' \vdash x :: \alpha_1, \emptyset}{(\text{RApp})\ A_2' \vdash (\texttt{Cons}\ x) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3} \quad , \quad \dfrac{(\text{AxSK})\ A_2' \vdash \texttt{g} :: [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]], \emptyset \quad , \quad \dfrac{(\text{AxSK})\ A_2' \vdash \texttt{g} :: [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]], \emptyset \quad , \quad (\text{AxK})\ A_2' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}{(\text{RApp})\ A_2' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{[\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7\}}}{(\text{RApp})\ A_2' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{[\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}}{(\text{RApp})\ A_2' \vdash \texttt{Cons}\ x\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{[\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4 \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}}{(\text{SKRek})\ A_2 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2)}$$

wobei σ die Lösung von
$\{[\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, [\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha_1 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}$ ist.

Unifikation:

$$\dfrac{\dfrac{[\texttt{Char}] \to [[\texttt{Char}]] \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \quad \ldots}{[\texttt{Char}] \doteq \texttt{Char}, \quad [[\texttt{Char}]] \doteq \alpha_7, \quad \ldots}}{Fail}$$

g ist nicht typisierbar.

Daher gilt ...

Beobachtung

Das iterative Typisierungsverfahren benötigt unter Umständen mehrere Iterationen, bis ein Ergebnis (untypisiert / konsistente Annahme) gefunden wurde.

Beachte: Es gibt auch Beispiele, die zeigen, dass mehrere Iterationen nötig sind, um eine konsistente Annahme zu finden (Übungsaufgabe).

Nichtterminierung des iterativen Verfahrens

```
f = [g]
g = [f]
```

Es gilt $\texttt{f} \simeq \texttt{g}$, d.h. das iterative Verfahren typisiert f und g gemeinsam.
$A = \{\texttt{Cons} :: \forall a.a \to [a] \to [a], \texttt{Nil} : \forall a.a\}$.
$A_0 = A \cup \{\texttt{f} :: \forall \alpha.\alpha, \texttt{g} :: \forall \alpha.\alpha\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{AxK})\ A_0 \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset \quad , \quad (\text{AxSK})\ A_0 \vdash \texttt{g} :: \alpha_5}{(\text{RApp})\ A_0 \vdash (\texttt{Cons}\ \texttt{g}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3\}} \quad , \quad (\text{AxK})\ A_0 \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}{(\text{RApp})\ A_0 \vdash [\texttt{g}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}}{(\text{SKRek})\ A_0 \vdash_T \texttt{f} :: \sigma(\alpha_1) = [\alpha_5]}$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [\alpha_5], \alpha_2 \mapsto \alpha_5, \alpha_3 \mapsto [\alpha_5] \to [\alpha_5], \alpha_4 \mapsto \alpha_5\}$ ist
Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

Nichtterminierung des iterativen Verfahrens (2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{AxK})\ A_0 \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset \quad , \quad (\text{AxSK})\ A_0 \vdash \texttt{f} :: \alpha_5}{(\text{RApp})\ A_0 \vdash (\texttt{Cons}\ \texttt{f}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3\}} \quad , \quad (\text{AxK})\ A_0 \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}{(\text{RApp})\ A_0 \vdash [\texttt{f}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}}{(\text{SKRek})\ A_0 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1) = [\alpha_5]}$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [\alpha_5], \alpha_2 \mapsto \alpha_5, \alpha_3 \mapsto [\alpha_5] \to [\alpha_5], \alpha_4 \mapsto \alpha_5\}$ ist
Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq \alpha_5 \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

Daher ist $A_1 = A \cup \{\texttt{f} :: \forall a.[a], \texttt{g} :: \forall a.[a]\}$. Da $A_1 \neq A_0$ muss man weiter iterieren.

Nichtterminierung des iterativen Verfahrens (3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{g} :: [\alpha_5]}\,(\text{AxSK})}{A_1 \vdash (\texttt{Cons g}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}\,(\text{AxK})}{A_1 \vdash [\texttt{g}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}\,(\text{RApp})}{A_1 \vdash_T \texttt{f} :: \sigma(\alpha_1) = [[\alpha_5]]}\,(\text{SKRek})$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [[\alpha_5]], \alpha_2 \mapsto [\alpha_5], \alpha_3 \mapsto [[\alpha_5]] \to [[\alpha_5]], \alpha_4 \mapsto [\alpha_5]\}$ ist Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{f} :: [\alpha_5]}\,(\text{AxSK})}{A_1 \vdash (\texttt{Cons f}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A_1 \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}\,(\text{AxK})}{A_1 \vdash [\texttt{f}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}\,(\text{RApp})}{A_1 \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1) = [[\alpha_5]]}\,(\text{SKRek})$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [[\alpha_5]], \alpha_2 \mapsto [\alpha_5], \alpha_3 \mapsto [[\alpha_5]] \to [[\alpha_5]], \alpha_4 \mapsto [\alpha_5]\}$ ist Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5] \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

Daher ist $A_2 = A \cup \{\texttt{f} :: \forall a.[[a]], \texttt{g} :: \forall a.[[a]]\}$. Da $A_2 \neq A_1$ muss man weiter iterieren.

Nichtterminierung des iterativen Verfahrens (4)

Vermutung: Terminiert nicht

Beweis: (Induktion) betrachte den i. Schritt:

$A_i = A \cup \{\texttt{f} :: \forall a.[a]^i, \texttt{g} :: \forall a.[a]^i\}$ wobei $[a]^i$ i-fach geschachtelte Liste

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_i \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_i \vdash \texttt{g} :: [\alpha_5]^i}\,(\text{AxSK})}{A_i \vdash (\texttt{Cons g}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A_i \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}\,(\text{AxK})}{A_i \vdash [\texttt{g}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}\,(\text{RApp})}{A_i \vdash_T \texttt{f} :: \sigma(\alpha_1) = [[\alpha_5]^i]}\,(\text{SKRek})$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [[\alpha_5]^i], \alpha_2 \mapsto [\alpha_5]^i, \alpha_3 \mapsto [[\alpha_5]^i] \to [[\alpha_5]^i], \alpha_4 \mapsto [\alpha_5]^i\}$ ist Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_i \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A_i \vdash \texttt{f} :: [\alpha_5]^i}\,(\text{AxSK})}{A_i \vdash (\texttt{Cons f}) :: \alpha_3, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A_i \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_2], \emptyset}\,(\text{AxK})}{A_i \vdash [\texttt{f}] :: \alpha_1, \{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}}\,(\text{RApp})}{A_i \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha_1) = [[\alpha_5]^i]}\,(\text{SKRek})$$

$\sigma = \{\alpha_1 \mapsto [[\alpha_5]^i], \alpha_2 \mapsto [\alpha_5]^i, \alpha_3 \mapsto [[\alpha_5]^i] \to [[\alpha_5]^i], \alpha_4 \mapsto [\alpha_5]^i\}$ ist Lösung von $\{\alpha_4 \to [\alpha_4] \to [\alpha_4] \doteq [\alpha_5]^i \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq [\alpha_2] \to \alpha_1\}$

D.h. $A_{i+1} = A \cup \{\texttt{f} :: \forall a.[a]^{i+1}, \texttt{g} :: \forall a.[a]^{i+1}\}$.

Daher ...

Beobachtung

Das iterative Typisierungsverfahren terminiert nicht immer.

Es gilt sogar:

Satz

Die iterative Typisierung ist unentscheidbar.

Dies folgt aus der Unentscheidbarkeit der so genannten Semi-Unifikation von First-Order Termen.
(siehe Forschungsliteratur)

Aufrufhierarchie

- Das iterative Verfahren benötigt die Information aus der Aufrufhierarchie nicht:
- Es liefert die gleichen Typen, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge man die SK typisiert.
- Die Aufrufhierarchie ist aber notwendig für das Hindley-Milner Verfahren (kommt noch).

Type Safety (einer Programmiersprache)

Ist allgemeine Eigenschaft einer getypten Programmiersprache!

Man spricht von Type Safety (einer Prog. Sprache) wenn gilt:

- („Type Preservation“)
  Die Typisierung (und der Typ) bleibt unter Reduktion erhalten:

  Für einen Grundtyp τ:
  Wenn $t :: \tau$ vor der Reduktion $t \to t'$,
  dann auch $t' :: \tau$ danach.

  D.h. Typ bleibt oder wird allgemeiner.
- (“Progress Lemma“) :
  Getypte geschlossene Ausdrücke sind reduzibel, solange sie keine WHNF sind.

Type Safety (2)

Lemma

Sei s ein direkt dynamisch ungetypter KFPTS+seq-Ausdruck. Dann kann das iterative Typsystem keinen Typ für s herleiten.

Beweis: s direkt dynamisch ungetypt ist, gdw.:

- $s = R[\mathsf{case}_T\ (c\ s_1\ \ldots\ s_n)\ \mathtt{of}\ Alts]$ und c ist nicht vom Typ T. Typisierung von case fügt Gleichungen hinzu, so dass der Typ von $(c\ s_1\ \ldots\ s_n)$ und Typ von Pattern gleich ist. Daher wird die Unifikation scheitern.
- $s = R[\mathsf{case}_T\ \lambda x.t\ \mathtt{of}\ Alts]$: Analog: die Gleichungen verlangen dass $(\lambda x.t)$ einen Funktionstyp erhält, aber Pattern haben nie einen Funktionstyp.
- $R[(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t]$: Typisierung typisiert die Anwendung $((c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t)$ wie eine verschachtelte Anwendung $(((c\ s_1)\ \ldots)\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t)$. Es werden Gleichungen hinzugefügt, die sicherstellen, dass c höchstens $\mathrm{ar}(c)$ Argumente verarbeiten kann.

Type Safety (3)

Lemma (Type Preservation)

Sei s ein wohl-getypter, geschlossener KFPTS+seq-Ausdruck und $s \xrightarrow{no} s'$. Dann ist s' wohl-getypt.

Beweis: Hierfür muss man die einzelnen Fälle einer (β)-, (SK$-\beta$)- und (case)-Reduktion durchgehen. Für die Typherleitung von s kann man aus der Typherleitung einen Typ für jeden Unterterm von s ablesen. Bei der Reduktion werden diese Typen einfach mitkopiert.

Type Safety (4)

Aus den letzten beiden Lemmas folgt:

Satz

Sei s ein wohl-getypter, geschlossener KFPTS+seq-Ausdruck. Dann ist s nicht dynamisch ungetypt.

Lemma (Progress Lemma)

Sei s ein wohl-getypter, geschlossener KFPTS+seq-Ausdruck. Dann gilt:

- *s ist eine WHNF, oder*
- *s ist normalordnungsreduzibel, d.h. $s \xrightarrow{no} s'$.*

Beweis Betrachtet man die Fälle, wann ein geschlossener KFPTS+seq-Ausdruck irreduzibel ist, so erhält man:
s ist eine WHNF oder s ist direkt-dynamisch ungetypt. Daher folgt das Lemma.

Type Safety (5)

Satz

Die iterative Typisierung für KFPTS+seq erfüllt die „Type-safety"-Eigenschaft.

Hindley-Milner Typisierung

Hindley-Milner Typisierung

Roger Hindley; Robin Milner und Luis Damas haben beigetragen.

Erzwingen der Terminierung (der Typcheck-Iteration)

- $SK_1, \ldots, SK_m$ ist Gruppe verschränkt rekursiver Superkombinatoren
- $A_i \vdash_T SK_1 :: \tau_1, \ldots, A_i \vdash_T SK_m :: \tau_m$ seien die durch die $i.$ Iteration hergeleiteten Typen

Hindley-Milner-Schritt: Typisiere $SK_1, \ldots, SK_m$ gemeinsam in einem Schritt,
mit der Annahme:

$$A_M = A \cup \{SK_1 :: \tau_1, \ldots, SK_m :: \tau_m\};$$

ohne Quantoren
D.h.: keine umbenannten Kopien der Typen bei verschiedenen Vorkommen des gleichen Namens

Erzwingen der Terminierung (2)

$$(\text{SKRekM}) \quad \frac{\text{für } i = 1, \ldots, m: \quad A_M \cup \{x_{i,1} :: \alpha_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i} :: \alpha_{i,n_i}\} \vdash s_i :: \tau_i', E_i}{A_M \vdash_T \text{für } i = 1, \ldots, m \; SK_i :: \sigma(\alpha_{i,1} \to \ldots \to \alpha_{i,n_i} \to \tau_i')}$$

wenn σ Lösung von $E_1 \cup \ldots \cup E_m \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{\tau_i \doteq \alpha_{i,1} \to \ldots \to \alpha_{i,n_i} \to \tau_i'\}$

und $SK_1 \; x_{1,1} \; \ldots \; x_{1,n_1} \;=\; s_1$

$\ldots$

$SK_m \; x_{m,1} \; \ldots \; x_{m,n_m} \;=\; s_m$

die Definitionen von $SK_1, \ldots, SK_m$ sind

Als zusätzliche Regel muss im Typisierungsverfahren hinzugefügt werden:

$$(\text{AxSK2}) \quad \frac{}{A \cup \{SK :: \tau\} \vdash SK :: \tau}$$

wenn τ nicht allquantifiziert ist

Erzwingen der Terminierung (3)

Unterschied zum iterativen Schritt:

- Die Typen der zu typisierenden SKs werden nicht allquantifiziert.
  (allquantifiziert sind die bekannten Typen von anderen SKs.)
- Daher sind während der Typisierung keine Kopien der aktuell zu bestimmenden Typen möglich
- Am Ende werden die angenommenen Typen mit den hergeleiteten Typen unifiziert.

Daraus folgt:
Die neue Annahme, die man durch die (SKREKM)-Regel herleiten kann, ist stets konsistent.

Nach einem Hindley-Milner-Schritt terminiert das Verfahren sofort.

Das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren

Hindley-Milner-Typisierung ist „Spezialisierung“ des iterativen Typisierungsverfahren.

Unterschiede:

- Es wird nur ein Iterationsschritt durchgeführt.
- Die aktuell zu typisierenden Superkombinatoren SK_i sind mit allgemeinstem Typ α_i (ohne Allquantor) in den Annahmen.
- Hindley-Milner typiserbar impliziert iterativ typisierbar

Effekte:

- Hindley-Milner ist schneller;
- es kann weniger Ausdrücke typisieren;
- und liefert manchmal speziellere Typen

Haskell verwendet das Hindley-Milner-Typisierungs-Verfahren.
Allerdings erweitert...

Das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren, genauer

Hindley-Milner-Typisierungsverfahren:
$SK_1, \ldots, SK_m$ ist eine $\simeq$-Äquivalenzklasse wobei
alle echt $\simeq$ kleineren SKs bereits getypt sind.

1. Die Annahme A enthält Typen der bereits typisierten SKs und Konstruktoren (allquantifiziert)
2. Typisiere $SK_1, \ldots, SK_m$ mit der Regel (MSKREK):

$$(\mathrm{MSKREK})\ \frac{\begin{array}{l}\text{für } i = 1, \ldots, m: \\ \quad A \cup \{SK_1 :: \beta_1, \ldots, SK_m :: \beta_m\} \\ \qquad \cup \{x_{i,1} :: \alpha_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i} :: \alpha_{i,n_i}\} \vdash s_i :: \tau_i, E_i\end{array}}{A \vdash_T \text{für } i = 1, \ldots, m\ SK_i :: \sigma(\alpha_{i,1} \to \ldots \to \alpha_{i,n_i} \to \tau_i)}$$

wenn σ Lösung von $E_1 \cup \ldots \cup E_m \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{\beta_i \doteq \alpha_{i,1} \to \ldots \to \alpha_{i,n_i} \to \tau_i\}$

und $\begin{array}{lcl} SK_1\ x_{1,1}\ \ldots\ x_{1,n_1} & = & s_1 \\ \ldots & & \\ SK_m\ x_{m,1}\ \ldots\ x_{m,n_m} & = & s_m \end{array}$

die Definitionen von $SK_1, \ldots, SK_m$ sind

Falls Unifikation fehlschlägt, sind $SK_1, \ldots, SK_m$ nicht Hindley-Milner-typisierbar

Das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren (2)

Vereinfachung: Regel für einen (unabhängigen) rekursiven SK

$$(\mathrm{MSKREK1})\ \frac{A \cup \{SK :: \beta, x_1 :: \alpha_1, \ldots, x_n :: \alpha_n\} \vdash s :: \tau, E}{A \vdash_T SK :: \sigma(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \tau)}$$

wenn σ Lösung von $E \cup \{\beta \doteq \alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \tau\}$
und $SK\ x_1\ \ldots\ x_n = s$ die Definition von SK ist

Eigenschaften des Hindley-Milner-Typcheck

Für das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren gelten die folgenden Eigenschaften:

- Das Verfahren terminiert.
- Das Verfahren liefert eindeutige Typen (bis auf Umbenennung von Variablen)
- Die Hindley-Milner-Typisierung ist entscheidbar.
- Das Problem, ob ein Ausdruck Hindley-Milner-typisierbar ist, ist DEXPTIME-vollständig
- Das Verfahren liefert u.U. eingeschränktere Typen als das iterative Verfahren. Insbesondere kann ein Ausdruck iterativ typisierbar, aber nicht Hindley-Milner-typisierbar sein.
- Das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren benötigt das Wissen um die *Aufrufhierarchie der Superkombinatoren*: Es berechnet evtl. weniger allgemeine Typen bzw. Typisierung schlägt fehl, wenn man nicht von unten nach oben typisiert.

Beispiele: Viele Typvariablen

Man benötigt manchmal exponentiell viele Typvariablen
Im Hindley-Milner-Typisierungsverfahren
(in der Größe des Ausdrucks):

```
(let x0 = \z->z in
  (let x1 = (x0,x0) in
    (let x2 = (x1,x1) in
      (let x3 = (x2,x2) in
         (let x4 = (x3,x3) in
            (let x5 = (x4,x4) in
               (let x6 = (x5,x5) in x6)))))))
```

Die Anzahl der Typvariablen ist $64 = 2^6$.
Verallgemeinert man das Beispiel mit Parameter n, dann sind 2^n Typvariablen notwendig.

Beispiele: map

```
map f xs = case xs of {
             [] -> []
             (y:ys) -> (f y):(map f ys)
           }
```

$A = \{\texttt{Cons} :: \forall a.a \to [a] \to [a], \texttt{Nil} :: \forall a.[a]\}$

Sei $A' = A \cup \{\texttt{map} :: \beta, f :: \alpha_1, xs :: \alpha_2\}$ und $A'' = A' \cup \{y : \alpha_3, ys :: \alpha_4\}$.

$$\text{(MSKRek1)}\ \frac{\begin{array}{ll}(a) & A' \vdash xs :: \tau_1, E_1\\ (b) & A' \vdash \texttt{Nil} :: \tau_2, E_2\\ (c) & A'' \vdash (\texttt{Cons}\ y\ ys) :: \tau_3, E_3\\ (d) & A' \vdash \texttt{Nil} :: \tau_4, E_4\\ (e) & A'' \vdash (\texttt{Cons}\ (f\ y)\ (\texttt{map}\ f\ ys)) :: \tau_5, E_5\end{array}}{\begin{array}{c}A' \vdash \texttt{case}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \texttt{Cons}\ y\ ys \to \texttt{Cons}\ y\ (\texttt{map}\ f\ ys)\} :: \alpha, E\\ \hline A \vdash_T \texttt{map} :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha)\\ \text{wenn } \sigma \text{ Lösung von } E \cup \{\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha\}\end{array}}\ \text{(RCase)}$$

wobei $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup \{\tau_1 \doteq \tau_2, \tau_1 \doteq \tau_3, \alpha \doteq \tau_4, \alpha \doteq \tau_5\}$.
(a) bis (e) folgt

Beispiele: map (2)

(a) $\dfrac{}{A' \vdash xs :: \alpha_2, \emptyset}\ \text{(AxV)}$
D.h. $\tau_1 = \alpha_2$ und $E_1 = \emptyset$.

(b) $\dfrac{}{A' \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_5], \emptyset}\ \text{(AxK)}$
D.h. $\tau_2 = [\alpha_5]$ und $E_2 = \emptyset$

(c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A'' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_6 \to [\alpha_6] \to [\alpha_6]}\ \text{(AxK)}\ ,\ \dfrac{}{A'' \vdash y :: \alpha_3, \emptyset}\ \text{(AxV)}}{A'' \vdash (\texttt{Cons}\ y) :: \alpha_7, \{\alpha_6 \to [\alpha_6] \to [\alpha_6] \doteq \alpha_3 \to \alpha_7\}}\ \text{(RApp)}\ ,\ \dfrac{}{A'' \vdash ys :: \alpha_4, \emptyset}\ \text{(AxV)}}{A'' \vdash (\texttt{Cons}\ y\ ys) :: \alpha_8, \{\alpha_6 \to [\alpha_6] \to [\alpha_6] \doteq \alpha_3 \to \alpha_7, \alpha_7 \doteq \alpha_4 \to \alpha_8\}}\ \text{(RApp)}$$
D.h. $\tau_3 = \alpha_8$ und $E_3 = \{\alpha_6 \to [\alpha_6] \to [\alpha_6] \doteq \alpha_3 \to \alpha_7, \alpha_7 \doteq \alpha_4 \to \alpha_8\}$

(d) $\dfrac{}{A' \vdash \texttt{Nil} :: [\alpha_9], \emptyset}\ \text{(AxK)}$
D.h. $\tau_4 = [\alpha_9]$ und $E_4 = \emptyset$.

Beispiele: map (3)

(e)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A'' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_{10} \to [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A'' \vdash f :: \alpha_1, \emptyset}\,(\text{AxV})}{A'' \vdash (f\ y) :: \alpha_{15}, \{\alpha_1 \doteq \alpha_3 \to \alpha_{15}\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A'' \vdash y :: \alpha_3, \emptyset}\,(\text{AxV})}{A'' \vdash (\texttt{Cons}\ (f\ y)) :: \alpha_{11}, \{\alpha_{10} \to [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}] \doteq \alpha_{15} \to \alpha_{11}, \alpha_1 \doteq \alpha_3 \to \alpha_{15}\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A'' \vdash \texttt{map} :: \beta, \emptyset}\,(\text{AxSK2}) \quad \dfrac{}{A'' \vdash f :: \alpha_1, \emptyset}\,(\text{AxV})}{A'' \vdash (\texttt{map}\ f) :: \alpha_{12}, \{\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_{12}\}}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{}{A'' \vdash ys :: \alpha_4, \emptyset}\,(\text{AxV})}{A'' \vdash (\texttt{map}\ f\ ys) :: \alpha_{13}, \{\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_{12}, \alpha_{12} \doteq \alpha_4 \to \alpha_{13}\}}\,(\text{RApp})$$

$$\dfrac{}{A'' \vdash (\texttt{Cons}\ (f\ y)\ (\texttt{map}\ f\ ys)) :: \alpha_{14},\ \{\alpha_{11} \doteq \alpha_{13} \to \alpha_{14}, \alpha_{10} \to [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}] \doteq \alpha_{15} \to \alpha_{11}, \alpha_1 \doteq \alpha_3 \to \alpha_{15}, \beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_{12}, \alpha_{12} \doteq \alpha_4 \to \alpha_{13}\}}$$

D.h. $\tau_5 = \alpha_{14}$ und

$E_5 = \{\alpha_{11} \doteq \alpha_{13} \to \alpha_{14}, \alpha_{10} \to [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}] \doteq \alpha_{15} \to \alpha_{11}, \alpha_1 \doteq \alpha_3 \to \alpha_{15},$
$\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_{12}, \alpha_{12} \doteq \alpha_4 \to \alpha_{13}\}$

Beispiele: map (4)

Gleichungssystem $E \cup \{\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha\}$ durch Unifikation lösen:

$$\{\alpha_6 \to [\alpha_6] \to [\alpha_6] \doteq \alpha_3 \to \alpha_7, \alpha_7 \doteq \alpha_4 \to \alpha_8, \alpha_{11} \doteq \alpha_{13} \to \alpha_{14},$$
$$\alpha_{10} \to [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}] \doteq \alpha_{15} \to \alpha_{11}, \alpha_1 \doteq \alpha_3 \to \alpha_{15}, \beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_{12},$$
$$\alpha_{12} \doteq \alpha_4 \to \alpha_{13}, \alpha_2 \doteq [\alpha_5], \alpha_2 \doteq \alpha_8, \alpha \doteq [\alpha_9], \alpha \doteq \alpha_{14},$$
$$\beta \doteq \alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha\}$$

Die Unifikation ergibt

$$\sigma = \{\alpha \mapsto [\alpha_{10}], \alpha_1 \mapsto \alpha_6 \to \alpha_{10}, \alpha_2 \mapsto [\alpha_6], \alpha_3 \mapsto \alpha_6, \alpha_4 \mapsto [\alpha_6], \alpha_5 \mapsto \alpha_6,$$
$$\alpha_7 \mapsto [\alpha_6] \to [\alpha_6], \alpha_8 \mapsto [\alpha_6], \alpha_9 \mapsto \alpha_{10}, \alpha_{11} \mapsto [\alpha_{10}] \to [\alpha_{10}],$$
$$\alpha_{12} \mapsto [\alpha_6] \to [\alpha_{10}], \alpha_{13} \mapsto [\alpha_{10}], \alpha_{14} \mapsto [\alpha_{10}], \alpha_{15} \mapsto \alpha_{10},$$
$$\beta \mapsto (\alpha_6 \to \alpha_{10}) \to [\alpha_6] \to [\alpha_{10}],$$

D.h. $map :: \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha) = (\alpha_6 \to \alpha_{10}) \to [\alpha_6] \to [\alpha_{10}]$.

Beispiele: erneute Betrachtung

```
g x = x : (g (g 'c'))
```

Iteratives Verfahren liefert Fail nach mehreren Iteration.
Hindley-Milner: $A = \{\texttt{Cons} :: \forall a.a \to [a] \to [a], \texttt{'c'} :: \texttt{Char}\}$.
Sei $A' = A \cup \{x :: \alpha, \texttt{g} :: \beta\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A' \vdash x :: \alpha, \emptyset}\,(\text{AxV})}{A' \vdash (\texttt{Cons}\ x) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha \to \alpha_3}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{g} :: \beta, \emptyset}\,(\text{AxSK2}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{g} :: \beta, \emptyset}\,(\text{AxSK2}) \quad \dfrac{}{A' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}\,(\text{AxK})}{A' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7\}}\,(\text{RApp})}{A' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}\,(\text{RApp})}{A' \vdash \texttt{Cons}\ x\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4 \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}\,(\text{RApp})$$

$$\dfrac{}{A \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha \to \alpha_2)}\,(\text{MSKRek})$$

wobei σ die Lösung von
$\{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \alpha \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2, \beta \doteq \alpha \to \alpha_2\}$ ist.

Die Unifikation schlägt jedoch fehl, da `Char` mit einer Liste unifiziert werden soll. D.h. g ist nicht Hindley-Milner-typisierbar.

Beispiele: erneute Betrachtung (2)

```
g x = 1 : (g (g 'c'))
```

Iteratives Verfahren liefert $g :: \forall \alpha.\alpha \to [\texttt{Int}]$
Hindley-Milner: Sei $A' = A \cup \{x :: \alpha, \texttt{g} :: \beta\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{Cons} :: \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5], \emptyset}\,(\text{AxK}) \quad \dfrac{}{A' \vdash 1 :: \texttt{Int}, \emptyset}\,(\text{AxK})}{A' \vdash (\texttt{Cons}\ 1) :: \alpha_3, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3}\,(\text{RApp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{g} :: \beta, \emptyset}\,(\text{AxSK2}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A' \vdash \texttt{g} :: \beta, \emptyset}\,(\text{AxSK2}) \quad \dfrac{}{A' \vdash \texttt{'c'} :: \texttt{Char}, \emptyset}\,(\text{AxK})}{A' \vdash (\texttt{g}\ \texttt{'c'}) :: \alpha_7, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7\}}\,(\text{RApp})}{A' \vdash (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_4, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4\}}\,(\text{RApp})}{A' \vdash \texttt{Cons}\ 1\ (\texttt{g}\ (\texttt{g}\ \texttt{'c'})) :: \alpha_2, \{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2\}}\,(\text{RApp})$$

$$\dfrac{}{A \vdash_T \texttt{g} :: \sigma(\alpha \to \alpha_2)}\,(\text{SKRek})$$

wobei σ die Lösung von
$\{\beta \doteq \texttt{Char} \to \alpha_7, \beta \doteq \alpha_7 \to \alpha_4, \alpha_5 \to [\alpha_5] \to [\alpha_5] \doteq \texttt{Int} \to \alpha_3, \alpha_3 \doteq \alpha_4 \to \alpha_2, \beta \doteq \alpha \to \alpha_2\}$ ist.

Die Unifikation schlägt fehl, da $[\alpha_5] \doteq \texttt{Char}$ unifiziert werden soll.

Iteratives Verfahren kann allgemeinere Typen liefern

```
data Baum a = Leer | Knoten a (Baum a) (Baum a)
```

Die Typen für die Konstruktoren sind
Leer :: $\forall a.$ Baum a und
Knoten :: $\forall a.\ a \to$ Baum a $\to$ Baum a $\to$ Baum a

```
g x y = Knoten True (g x y) (g y x)
```

Hindley-Milner-Typcheck g :: $a \to a \to$ Baum Bool
Iteratives Verfahren: g :: $a \to b \to$ Baum Bool
Grund (im Verfahren):
Iteratives Verfahren erlaubt Kopien des Typs für g, Hindley-Milner nicht.

Haskell akzeptiert für g die allgemeinere Typannahme:

```
g:: a -> b -> Baum Bool
g x y = Knoten True (g x y) (g y x)
```


Potentielle Nutzung der iterativen Typisierung in Haskell

- Wenn Superkombinatoren $S_1, \ldots, S_n$ nicht Hindley-Milner-typisierbar oder Hindley-Milner liefert (vermutet) zu speziellen Typ
- Aktion: Typisiere $S_1, \ldots, S_n$ mit dem iterativen (polymorphen) Typisierungsverfahren
- Wenn Erfolg: $S_1 : \tau_1, \ldots, S_n : \tau_n$,
- Dann: spezifiziere im Programm-File :
- $s_1 :: \tau_1, \ldots, s_n :: \tau_n$
- Danach kann Haskell die Typen verifizieren und verwenden !

Hindley-Milner Typisierung und Type Safety

- Hindley-Milner-getypte Programme sind immer auch iterativ typisierbar
- Daher sind Hindley-Milner getypte Programme niemals dynamisch ungetypt
- Es gilt auch das Progress-Lemma: Hindley-Milner getypte (geschlossene) Programme sind WHNFs oder reduzibel

Hindley-Milner Typisierung und Type Safety (2)

- Type-Preservation: Gilt in KFPTSP+seq aber vermutlich nicht in Haskell (als Kernsprache mit let)

```
let x = (let y = \u -> z in (y [], y True, seq x True))
    z = const z x
in x
```

ist Hindley-Milner-typisierbar.

- Wenn man eine so genannte $(llet)$-Reduktion durchführt, erhält man:

```
let x = (y [], y True, seq x True)
    y = \u -> z
    z = const z x
in x
```

Ist nicht mehr Hindley-Milner-typisierbar (in Kernsprache mit let)

„Vermutlich“: Haskells operationale Semantik ist anders definiert

Hindley-Milner Typisierung und Type Safety (3)

Im Let-Kernsprache: Hindley-Milner-typisierbar:

```
let x = (let y = \u -> z in (y [], y True, seq x True))
    z = const z x
in x
```

- mittels (llet) reduziert das zu:

```
let x = (y [], y True, seq x True)
    y = \u -> z
    z = const z x
in x
```

NICHT Hindley-Milner typisierbar (aber iterativ typisierbar):

- Der Effekt kommt von der Allquantifizierung nach erfolgreicher Typisierung:

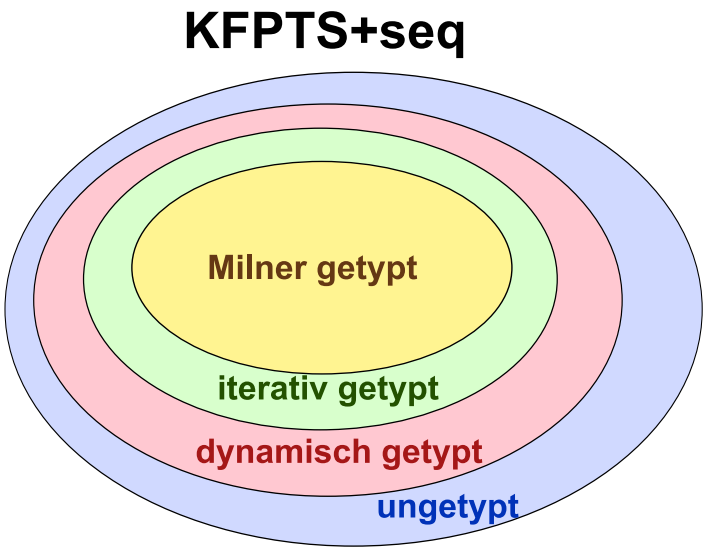
  Vorher: einmal kann allquantifiziert werden
  Nachher: alles wird auf einmal typisiert.

Hindley-Milner Typisierung und Type Safety(4)

Das Beispiel ist aber unkritisch, denn:

- Type-Preservation gilt für das iterative Verfahren;
- typisierte Programme sind dynamisch getypt;
- Hindley-Milner-typisierbar impliziert iterativ typisierbar und
- Reduktion erhält iterative Typisierbarkeit

Übersicht



Prädikativ / Imprädikativ

- Prädikativer Polymorphismus: Typvariablen stehen für Grundtypen (= Haskell, KFPTSP+seq)
- Imprädikativer Polymorphismus: Typvariablen stehen auch für polymorphe Typen (mit Quantoren!)

Versuch `\x -> const (x True) (x 'A')` zu typisieren:

`x` ist eine Funktion, die für alle Eingabetypen den gleichen Ergebnistyp liefert

Mit imprädikativem Polymorphismus geht das:

```
(\x -> const (x True) (x 'A'))::(forall b.(forall a. a -> b) -> b)
```

Aber:

- Haskell-Typangaben müssten erweitert werden.
- Die Typinferenz / Typisierbarkeit wäre dann nicht mehr entscheidbar!

Typisierung unter Typklassen

Typisierung wenn Typklassen eine Rolle spielen

in Haskell

Typisierung unter Typklassen in Haskell

Annahmen:

- Erweiterung der Typisierungsalgorithmen auf Typklassen-Beschränkungen.
- Während der Typisierung kommen Typklassenbeschränkungen nur aus den Annahmen (Superkombinatoren)
- Basis ist Haskell.
  (oder auch KFPTSP, erweitert um Zahlen und Typklassen)

Beispiel

`genericLength:: Num b => [a] → b` in `Data.List`

Typ wird berechnet anhand der Definition; das ist genau die *length*-Definition. Allerdings sind Zahlen und Addition bzgl. einer allgemeinen Typklasse `Num`.
Die Typ-Beschränkungen kommen von der Addition $+$.

Erweiterung des polymorphen Typsystems um Typklassen

- Typklassen Cl als Namen (Z.B. `Num`, `Eq`, `Show`)
- Typen von Ausdrücken sind ein Paar, geschrieben: C => τ
  wobei C *Typklassenconstraint*, τ ist polymorpher Typ.
- Ein Typklassenconstraint ist eine Menge von Ausdrücken $Cl\ a$.
  Cl ist ein Typklassenname und a eine Typvariable.
  Alle Typvariablen in C kommen auch in τ vor.)
- Es gibt vorgegebene Funktionen (auch Klassenfunktionen)
  deren Typ schon nichttriviale Typklassenconstraints enthält.
  (Haskell: Konstruktoren sind ohne Typklassenconstraints)

Beispiel

- `Num` ist Typklasse der (Basis-)Typen zu Zahlen
- `(+):: Num a => a → a → a`

Typklassenaxiome

Eine global vorgegebene Menge $M_{Typklassenaxiome}$ von Formeln:

1. $Cl\ \tau$ (d.h. $\tau \in Cl$) für Basistypen τ.
   Z.B.: `Bounded`, `Eq`, `Num`
   Nicht möglich: Cl(`List Bool`)
2. Implikationen der Form $C \implies Cl(TC\ a_1 \ldots a_n)$
   wobei $a_1, \ldots, a_n$ verschiedene Typvariablen sind und in C nur Typklassenconstraints der Form $Cl_i\ a_i$ vorkommen.
   Pro Typkonstruktor TC darf es nur eine solche Implikation geben.
3. Implikationen der Form $Cl_1\ a \implies Cl_2\ a$.

Typklassenaxiome, Beispiel

Beispiel: Spezifikation der Typen von Funktionen/Konstanten:

- `Eq Int`, und `Eq Bool`
  D.h. `Int` und `Bool`- Ausdrücke erlauben EQ-Tests.
- `Eq` $a \implies$ `Eq` $[a]$.
  Wenn Elemente vom Typ a Gleichheitstest zulassen, dann auch Listen dieser Elemente.
- $\{$`Eq` a, `Eq` $b\} \implies$ `Eq` (a, b).
  Wenn Elemente vom Typ a Gleichheitstest zulassen, dann auch für Paare der Elemente. (auch Tupel)

Folgt daraus z.B.:?

`Eq ([Int],Bool).` Ja

`Eq ([[[[Int]]]])` Ja

Berechnungen auf Typklassenconstraints

Fragestellung: gehört ein (Grund-) Typ zu einer Typklasse?

Verfahren: Typklassenconstraints entscheiden

Eingabe: Constraint-Menge $\mathcal{C} = \{Cl\ \tau, \ldots\}$.
Vereinfache die Menge mit den zwei folgenden Schritten solange, bis die Menge leer ist und somit alle Constraints erfüllt.

1. Wähle ein Constraint $Cl\ TC$ aus $\mathcal{C}$: wenn dies gilt, d.h. in $M_{Typklassenaxiome}$ enthalten ist, wobei wir die einfachen Implikation $Cl_1\ a \implies Cl_2\ a$ hierbei mitberücksichtigen, dann entferne das Constraint aus der Menge $\mathcal{C}$.
2. Nehme ein Constraint $Cl\ (TC\ \tau_1 \ldots \tau_n)$ aus $\mathcal{C}$ (mit maximaler Größe); wenn es eine Implikation $C_0 \implies Cl(TC\ a_1 \ldots a_n)$ gibt, dann ersetze das Constraint in $\mathcal{C}$ durch die Menge $\sigma(C_0)$, wobei $\sigma = \{a_1 \mapsto \tau_1, \ldots, a_n \mapsto \tau_n\}$ ist.

Wenn die Constraint-Menge leer ist, dann ergibt sich `True`.
Wenn diese nicht komplett eliminiert werden kann, ergibt sich insgesamt `False`.

Typklassenconstraints: Beispiel

Gegeben als Axiome:

- `Eq Int`, und `Eq Bool`,
- `Eq` $a \implies$ `Eq` $[a]$.
- $\{$`Eq` a, `Eq` $b\} \implies$ `Eq` (a, b).

Gilt `Eq ([Int],Bool).` ?

Start:	$\{$`Eq ([Int], Bool)`$\}$	
	$\{$`Eq [Int], Eq Bool`$\}$	wg. Implikation für Paare
	$\{$`Eq Int, Eq Bool`$\}$	wg. Implikation für Listen
	$\emptyset$,	da beide gelten
Ergebnis:	`True`	

Was ist ein Baumautomat?

- Analog zu endlichem Automaten, aber statt Strings werden endliche Bäume eingelesen und akzeptiert oder verworfen.
- Bäume sind first-order Terme ohne Variablen.
  Werden manchmal auch „ranked trees“ genannt.

Ein Baum B wird folgendermaßen verarbeitet von einem Baumautomaten T:

1. Jedes Blatt wird mit dem Zustand entsprechend T markiert
2. Knoten werden markiert (von den Blättern her):
   Wenn $f\ s_1 \ldots s_n$ der Knoten ist,
   und s_i schon mit a_i markiert ist, dann markiere Knoten mit dem label $f(a_1, \ldots, a_n)$ entsprechend dem Baumautomaten T
3. Wenn die Wurzel mit a markiert wird, und a ist ein akzeptierender Zustand von T, dann wird der Baum B von T akzeptiert.
4. Die Menge der akzeptierten Bäume ist die Baumsprache zu T.

Beispiel

Aussagenlogische Auswertung

. . . . .

Typklassenconstraints testen und Baumautomaten

- Das algorithmische Problem, ob $Cl\ \tau$ gilt, ist eigentlich dasselbe wie die Frage, ob ein Baumautomat einen gegebenen Baum akzeptiert oder nicht.
- Der Baumautomat ist gegeben durch die Typklassenaxiome.
- Hier gibt es den Unterschied, ob der Baumautomat deterministisch ist oder nicht,
  und ob er von oben oder von unten den Baum abarbeitet.
- Das Problem ist mit einem polynomiellen Algorithmus entscheidbar.
- Zu allgemeinen Aussagen, insbesondere Komplexität, siehe Buch zu Tree Automata (Literatur im Skript). In speziellen Fall der Typklassen hat man deterministische Varianten.

Typklassen: Semantik bzgl. Grundtypen

Definition

Die (Grundtypen-)Semantik eines Typs unter den Constraints kann man so definieren:

$$sem(C,\tau) \quad = \quad \{\sigma(\tau) \mid \sigma \text{ setzt Grundtypen für Typvariablen ein und für alle Constraints } (TC\ a) \in C : (\sigma(a) \in sem(TC)\}$$

$\Longrightarrow$ Die Axiome kann man als Mengendefinitionen ansehen.

Typklassen: Beispiele für Typisierung

Typklassen, Axiome und Klassenfunktionen zu Haskell-Typklassen wie `Num`, `Ord`, und `Show` sind vorhanden.
Ebenso Typ von Klassenfunktionen wie $+$ ist schon gegeben als:
$+ :: \{\texttt{Num}\ a\}$ `=>` $a \to a \to a$.

Beispiel Typisierung

$\lambda x.\lambda y.(x, y, x + y)$.
$x :: \alpha_1, y :: \alpha_2$
Typ von $+$ erzwingt: $a = \alpha_1 = \alpha_2$ und $\texttt{Num}\ a$.
Es ergibt sich:
$\lambda x.\lambda y.(x, y, x + y) :: \{\texttt{Num}\ a\}$ `=>` $a \to a \to (a, a, a)$

Typisierung unter Typklassen: Unifikation

Änderungen der Unifikation:

1. Man startet mit einer Gleichung $s \doteq t$ und eine Menge $\mathcal{C}$ von Typklassenconstraints für Typvariablen.
2. Man wendet die Unifikationsregeln auf die Gleichungen an, bis sich am Ende eine Substitution σ ergibt.
3. Man vereinfacht die Constraint-Menge vollständig.
   Durch Anwendung der Regeln für komplexere Constraints.
4. Wenn danach alle Constraints nur noch die Form $(TC\ a)$ haben, dann ist das Verfahren erfolgreich.
   Ergebnis ist die Substitution σ und ein Constraint $\mathcal{C}$ der Form $(TC_1\ a_1) \wedge \ldots \wedge (TC_n\ a_n)$

Typisierung unter Typklassen: Unifikation

- Analog sind die Änderungen bei den Typisierungsverfahren von Ausdrücken und Superkombinatoren.
- Dies gilt für das Hindley-Milner-Typisierungsverfahren.
- Iteratives Typisierungsverfahren: sollte auch gehen:
  es werden nicht nur in jedem Schritt die Typen verfeinert, sondern auch die Constraints.

Typisierung unter Typklassen: Beispiel

Addition auf Paaren: (muss man extra definieren!)

```
(x1,x2) + (y1,y2) = (x1+y1,x2+y2)
```

Implikationsaxiom für Paare: $\{\texttt{Num}\ a, \texttt{Num}\ b\} \implies \texttt{Num}\ (a, b)$.

Typisiere die Funktion: `f x = x+(1,2)`

$x :: \alpha$.
$+ :: \{\texttt{Num}\ a\}$ => $a \to a \to a$.

Gleichungen: $\alpha \doteq a, a \doteq (\texttt{Int}, \texttt{Int})$
Constraint: $\{\texttt{Num}\ a\}$.
Unifikation ergibt $\sigma = \{a \mapsto (\texttt{Int}, \texttt{Int}), \alpha \mapsto (\texttt{Int}, \texttt{Int})\}$
Constraintmenge: $\{\texttt{Num}\ (\texttt{Int}, \texttt{Int})\}$.
Implikation und Basisconstraints zeigen, dass das Constraint gilt!
Resultat: $f :: (\texttt{Int}, \texttt{Int}) \to (\texttt{Int}, \texttt{Int})$

Typisierung unter Typklassen: Beispiel

Typisiere die Funktion: `g x y = x+(y,y)`

$x :: \alpha, y :: \beta$
$+ :: \{\texttt{Num}\ a\}$ => $a \to a \to a$.

Gleichungen: $\alpha \doteq (\beta, \beta), a \doteq \alpha)$
Constraint: $\{\texttt{Num}\ a\}$.
Unifikation ergibt $\sigma = \{a \mapsto (\beta, \beta), \alpha \mapsto (\beta, \beta)\}$
Constraintmenge: $\{\texttt{Num}\ (\beta, \beta)\}$.
Implikation ergibt als Constraint: $\{\texttt{Num}\ \beta\}$.
Resultat: $g :: \{\texttt{Num}\ \beta\} \implies (\beta, \beta) \to \beta \to (\beta, \beta)$

Typisierung unter Typklassen: Beispiel

```
genericLength xs = case xs of [] -> 0;
                              y:ys -> 1 +  genericLength ys
```

Typisierung; ergibt Gleichungen und Bedingungen:
$xs :: \alpha_1$, $0 ::$ `Num` $b_1 \implies b_1$, $1 ::$ `Num` $b_2 \implies b_2$
`genericLength` $:: \alpha_1 \to \alpha_2$.
wegen (`case xs of []...`): $\alpha_1 = [\alpha_4]$
`genericLength` $ys :: \alpha_2$
$+ ::$ `Num` $a \implies a \to a \to a$.
$a = b_2$, $a = \alpha_2$, $b_1 = \alpha_2$; `Num` a, `Num` b_1, `Num` b_2.
Ergibt insgesamt: `genericLength` $::$ `Num` $a \implies [b] \to a$