

# Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen:  
Einleitung & Der Lambda-Kalkül

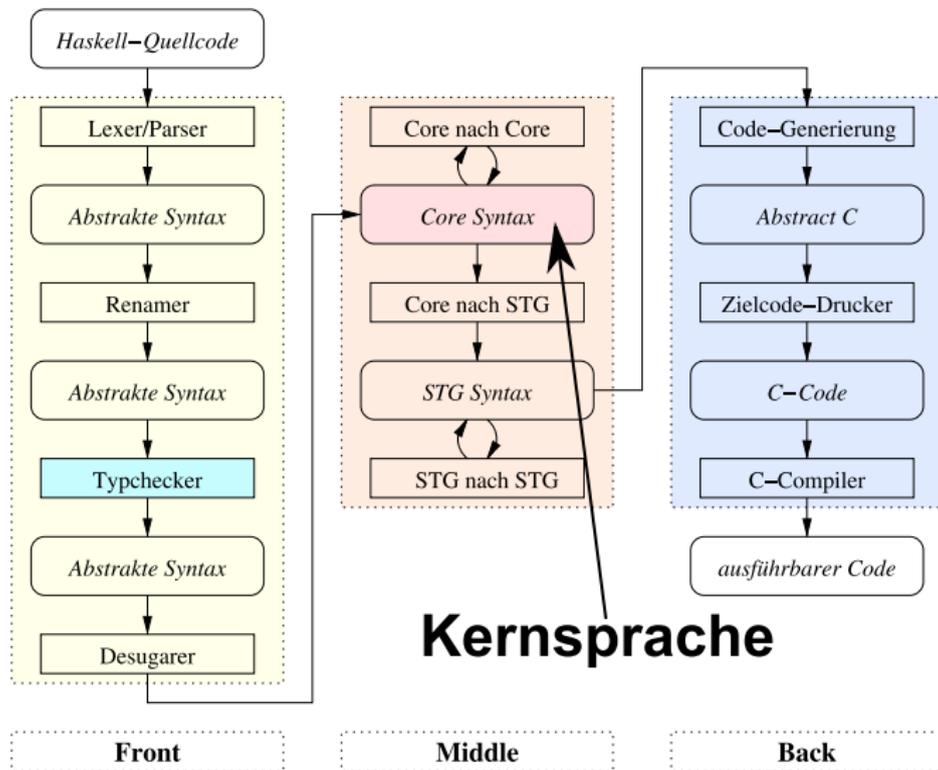
Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

WS 2024/25

# Übersicht

- 1 Einleitung und Lambda Kalkül
- 2 Normal-Order-Reduktion
- 3 CBV
- 4 Haskell
- 5 Programmieren mit `let` in Haskell
- 6 Gleichheit

# Compilerphasen des GHC (schematisch)



# Einleitung

- Wir betrachten zunächst den **Lambda-Kalkül**
- Er ist „Kernsprache“ fast aller (funktionalen) Programmiersprachen
- Allerdings oft zu minimalistisch,  
später: **Erweiterte Lambda-Kalküle**
- Kalkül: **Syntax** und **Semantik**
- Sprechweise: **der** Kalkül (da mathematisch)

# Kalküle

## Syntax

- Legt fest, welche Programme (Ausdrücke) gebildet werden dürfen
- Welche **Konstrukte** stellt der Kalkül zu Verfügung?

## Semantik

- Legt die **Bedeutung** der Programme fest
- Gebiet der **formalen Semantik** kennt verschiedene Ansätze  
→ kurzer Überblick auf den nächsten Folien

# Ansätze zur Semantik

## Axiomatische Semantik

- Beschreibung von Eigenschaften von Programmen mithilfe **logischer Axiome** und **Schlussregeln**
- **Herleitung** neuer Eigenschaften mit den Schlussregeln
- Prominentes Beispiel: Hoare-Logik, z.B.

Hoare-Tripel  $\{P\}S\{Q\}$ :

Vorbedingung  $P$ , Programm  $S$ , Nachbedingung  $Q$

Schlussregel z.B.:

$$\text{Sequenz: } \frac{\{P\}S\{Q\}, \{Q\}T\{R\}}{\{P\}S;T\{R\}}$$

- Erfasst i.a. nur einige Eigenschaften, nicht alle, von Programmen

# Ansätze zur Semantik (2)

## Denotationale Semantik

- **Abbildung** von Programmen in mathematische (Funktionen-)Räume durch **Semantische Funktion**
- Oft Verwendung von partiell geordneten Mengen (Domains)
- Z.B.  $\llbracket \cdot \rrbracket$  als semantische Funktion:

$$\llbracket \text{if } a \text{ then } b \text{ else } c \rrbracket = \begin{cases} \llbracket b \rrbracket, & \text{falls } \llbracket a \rrbracket = \text{True} \\ \llbracket c \rrbracket, & \text{falls } \llbracket a \rrbracket = \text{False} \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist eher **mathematisch**
- Schwierigkeit steigt mit dem Umfang der Syntax
- Nicht immer unmittelbar anwendbar (z.B. Nebenläufigkeit)

# Ansätze zur Semantik (3)

## Operationale Semantik

- definiert genau die **Auswertung/Ausführung** von Programmen
- definiert einen Interpreter
- Verschiedene Formalismen:
  - Zustandsübergangssysteme
  - Abstrakte Maschinen
  - Ersetzungssysteme
- Unterscheidung in **small-step** und **big-step** Semantiken
- Wir werden bevorzugt operationale (small-step) Semantiken verwenden

# Der Lambda-Kalkül als Semantik für Programmiersprachen

## Lambda-Kalkül als Semantik auch für imperative Programmiersprachen

- Lambda-Kalkül wird oft als semantischer Bereich für andere Programmiersprachen genutzt:

Abbildung von Programmen/Ausdrücken in den Lambda-Kalkül.

- Grund ist, dass es eindeutig ist und sehr genau bekannt ist, wie man mit Namen, Funktionen, Funktionsanwendungen im Lambda-Kalkül umgeht.

# Der Lambda-Kalkül

- Von **Alonzo Church** und **Stephen Kleene** in den 1930er Jahren eingeführt

- **Idee und Ziel:** Darstellungen der Berechnung von Funktionen

$$x \mapsto f(x) \quad x \text{ ist Eingabe; } f(x) \text{ Ausgabe}$$

Mechanisches Rechenverfahren mit Funktionen  
(Alternative zu Turing-Maschine)

- **Beispiele**
- Der Lambda-Kalkül ist **minimal**: es geht NUR um Funktionen.  
Man definiert Funktionen;  
die Argumente sind ebenfalls Funktionen.

# Der Lambda-Kalkül

- Wir betrachten den **ungetypten** Lambda-Kalkül.
- Wir geben die (eine) **Auswertung als operationale Semantik** an.  
Church, Kleene und auch andere Artikel / Bücher gehen meist axiomatisch vor (mit Gleichheitsaxiomen)
- Der ungetypte Lambda-Kalkül ist **Turing**-mächtig.
- Viele Ausdrücke des Lambda-Kalküls können in **Haskell** eingegeben werden, aber nur wenn sie Haskell-**typisierbar** sind.
- Haskell-Programm zur Auswertung von beliebigen Lambda-Ausdrücken: LExp.hs (siehe Webseite)

## vereinfachte Beispiele

 $(\lambda x.x) \text{ object} \quad \longrightarrow \quad \text{object}$

## vereinfachte Beispiele

$$(\lambda x.x) \text{ object} \quad \longrightarrow \quad \text{object}$$
$$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2} \quad \longrightarrow \quad \text{o1}$$

## vereinfachte Beispiele

 $(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$  $(\lambda x y.x) o1 o2 \longrightarrow o1$  $(\lambda x y.y) o1 o2 \longrightarrow o2$

## vereinfachte Beispiele

 $(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$  $(\lambda x y.x) o1 o2 \longrightarrow o1$  $(\lambda x y.y) o1 o2 \longrightarrow o2$  $(\lambda x y z.y) o1 o2 o3 \longrightarrow o2$

## vereinfachte Beispiele

$$\begin{array}{ll}
 (\lambda x.x) \text{ object} & \longrightarrow \text{object} \\
 (\lambda x y.x) o1 o2 & \longrightarrow o1 \\
 (\lambda x y.y) o1 o2 & \longrightarrow o2 \\
 (\lambda x y z.y) o1 o2 o3 & \longrightarrow o2 \\
 (\lambda f g x.f (g x)) F G a & \longrightarrow F (G a)
 \end{array}$$

## vereinfachte Beispiele

$(\lambda x.x) \text{ object}$	$\longrightarrow$	$\text{object}$	Identität
$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2}$	$\longrightarrow$	$\text{o1}$	Projektion links
$(\lambda x y.y) \text{ o1 o2}$	$\longrightarrow$	$\text{o2}$	Projektion rechts
$(\lambda x y z.y) \text{ o1 o2 o3}$	$\longrightarrow$	$\text{o2}$	Projektion
$(\lambda f g x.f (g x)) F G a$	$\longrightarrow$	$F (G a)$	Komposition von Funktionen

# Syntax des Lambda-Kalküls

<b>Expr</b> ::= $V$	<b>Variable</b> (unendliche Menge)
$\lambda V.$ <b>Expr</b>	<b>Abstraktion</b>
<b>(Expr Expr)</b>	<b>Anwendung</b> (Applikation)

- Abstraktionen sind **anonyme Funktionen**

Z. B.  $id(x) = x$  in Lambda-Notation:  $\lambda x.x$

- Haskell:  $\backslash x \rightarrow s$  als Programmcode für  $\lambda x.s$
- $(s t)$  erlaubt die Anwendung von Funktionen auf Argumente  $s, t$  beliebige Ausdrücke  $\implies$  Lambda Kalkül ist **higher-order**

Z. B.  $(\lambda x.x) (\lambda x.x)$  (entspricht gerade  $id(id)$ )

# Syntax des Lambda-Kalküls (2)

## Assoziativitäten, Prioritäten und Abkürzungen

- Klammerregeln:  $s r t$  entspricht  $(s r) t$
- Priorität: Rumpf einer Abstraktion so groß wie möglich:  
 $\lambda x.x y$  ist  $\lambda x.(x y)$  und **nicht**  $((\lambda x.x) y)$
- $\lambda x, y, z.s$  entspricht  $\lambda x.\lambda y.\lambda z.s$  entspricht  $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.s))$

Hierbei wird der Ausdruck von links nach rechts durchgegangen;  
(wie beim Parsen).

Z.B.  $(x x z) (a b c) (d e f)$  entspricht geklammert:  
 $((x x) z) ((a b) c) ((d e) f)$

# Lambda-Kalkül Beispiele

- $\lambda x.x$  (Identitätsfunktion)  
Haskell-Eingabe: `\x -> x` z.B. `(\x->x) 1`

# Lambda-Kalkül Beispiele

- $\lambda x.x$  (Identitätsfunktion)  
Haskell-Eingabe:  $\backslash x \rightarrow x$  z.B.  $(\backslash x \rightarrow x) 1$
- $\lambda x.\lambda y.x y$   
(Funktions-Anwendung des 1. auf das 2. Argument)

# Lambda-Kalkül Beispiele

- $\lambda x.x$  (Identitätsfunktion)  
Haskell-Eingabe:  $\backslash x \rightarrow x$  z.B.  $(\backslash x \rightarrow x) 1$
- $\lambda x.\lambda y.x y$   
(Funktions-Anwendung des 1. auf das 2. Argument)
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$   
(Mittleres aus drei Argumenten ist das Resultat.)

# Lambda-Kalkül Beispiele

- $\lambda x.x$  (Identitätsfunktion)  
Haskell-Eingabe:  $\backslash x \rightarrow x$  z.B.  $(\backslash x \rightarrow x) 1$
- $\lambda x.\lambda y.x y$   
(Funktions-Anwendung des 1. auf das 2. Argument)
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$   
(Mittleres aus drei Argumenten ist das Resultat.)
- $(\lambda x.\lambda y.y x)$   
(Das zweite Argument wird auf das erste angewendet)

# Lambda-Kalkül Beispiele

- $\lambda x.x$  (Identitätsfunktion)  
Haskell-Eingabe: `\x -> x` z.B. `(\x->x) 1`
- $\lambda x.\lambda y.x y$   
(Funktions-Anwendung des 1. auf das 2. Argument)
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$   
(Mittleres aus drei Argumenten ist das Resultat.)
- $(\lambda x.\lambda y.y x)$   
(Das zweite Argument wird auf das erste angewendet)

## Beispiele, was im Lambda Kalkül fehlt:

**keine** direkte Kodierung von Zahlen, Datenstrukturen.

**kein** unmittelbares `if-then-else`

**keine** Iterationen, Drucken, ...

# Bekannte Lambda-Ausdrücke

## Oft vorkommende Ausdrücke (Kombinatoren)

$I$  :=  $\lambda x.x$  Identität

$K$  :=  $\lambda x.\lambda y.x$  Projektion auf Argument 1

$K2$  :=  $\lambda x.\lambda y.y$  Projektion auf Argument 2

$\Omega$  :=  $(\lambda x.(x x)) (\lambda x.(x x))$  terminiert nicht

$Y$  :=  $\lambda f.(\lambda x.(f (x x))) (\lambda x.(f (x x)))$  Fixpunkt Kombinator

$S$  :=  $\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x z) (y z)$  S- Kombinator zum SKI-calculus

$Y'$  :=  $\lambda f.(\lambda x.(\lambda y.(f (x x y)))) (\lambda x.(\lambda y.(f (x x y))))$   
Fixpunkt Kombinator Variante für call-by-value

# Beispiel zur Lambda-Notation

**Beispiel: algebraische Funktionen**  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

**Lambda-Kalkül mit Integers  $\mathbb{Z}$  und einfacher Arithmetik**

Operator  $F$ : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

# Beispiel zur Lambda-Notation

**Beispiel: algebraische Funktionen**  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

**Lambda-Kalkül mit Integers  $\mathbb{Z}$  und einfacher Arithmetik**

Operator  $F$ : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

$F(f) := f'$ , so dass  $f'(x) = f(x) - 2$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$

# Beispiel zur Lambda-Notation

**Beispiel: algebraische Funktionen**  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

**Lambda-Kalkül mit Integers  $\mathbb{Z}$  und einfacher Arithmetik**

Operator  $F$ : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

$F(f) := f'$ , so dass  $f'(x) = f(x) - 2$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$

Mit Lambda-Notation formuliert:

(wenn man Zahlen und arithmetische Operatoren erlaubt)

$F := \lambda f. \lambda x. (f \ x) - 2$

Also:  $F$  angewendet auf die "Funktion  $f = y^2$ ":

$F (\lambda y. y * y)$  ergibt:  $\lambda x. (f \ x) - 2 = \lambda x. x * x - 2$

# Begriffe im Lambda-Kalkül

## Freie und gebundene Variablen:

Durch  $\lambda x$  ist  $x$  im Rumpf  $s$  von  $\lambda x.s$  **gebunden**.

Kommt  $x$  in  $t$  vor, so

- ist das Vorkommen **frei**, wenn kein  $\lambda x$  darüber steht
- andernfalls ist das Vorkommen **gebunden**

Beispiel:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda w.(x y z)) x$$

- $x$  kommt je einmal gebunden und frei vor
- $y$  kommt gebunden vor
- $z$  kommt frei vor

# Begriffe im Lambda-Kalkül

## Menge der freien und gebundenen Variablen

**$FV(t)$ : Freie Variablen von  $t$**

$$FV(x) = x$$

$$FV(\lambda x.s) = FV(s) \setminus \{x\}$$

$$FV(s t) = FV(s) \cup FV(t)$$

**$BV(t)$ : Gebundene Var. von  $t$**

$$BV(x) = \emptyset$$

$$BV(\lambda x.s) = BV(s) \cup \{x\}$$

$$BV(s t) = BV(s) \cup BV(t)$$

# Begriffe im Lambda-Kalkül

## Menge der freien und gebundenen Variablen

**$FV(t)$ : Freie Variablen von  $t$**

$$FV(x) = x$$

$$FV(\lambda x.s) = FV(s) \setminus \{x\}$$

$$FV(s t) = FV(s) \cup FV(t)$$

**$BV(t)$ : Gebundene Var. von  $t$**

$$BV(x) = \emptyset$$

$$BV(\lambda x.s) = BV(s) \cup \{x\}$$

$$BV(s t) = BV(s) \cup BV(t)$$

Wenn  $FV(t) = \emptyset$ , dann sagt man:

$t$  ist **geschlossen** bzw.  $t$  ist ein **Programm**

Andernfalls:  $t$  ist ein **offener** Ausdruck

$$\text{Z.B. } BV(\lambda x.(x (\lambda z.(y z)))) = \{x, z\}$$

$$FV(\lambda x.(x (\lambda z.(y z)))) = \{y\}$$

# Motivation zu Substitution

## Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$   $a$ : Idee der Berechnung:  
Resultat  $s'$ , wobei:  
 $s'$  ist  $s$  wobei jedes  $x$  in  $s$  durch  $a$  ersetzt wird.  
(i.a. richtig; Sonderfälle brauchen mehr Erklärungen)

### Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \textit{id})$  ist  $(\lambda y.\textit{id})$

# Motivation zu Substitution

## Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$   $a$ : Idee der Berechnung:  
 Resultat  $s'$ , wobei:  
 $s'$  ist  $s$  wobei jedes  $x$  in  $s$  durch  $a$  ersetzt wird.  
 (i.a. richtig; Sonderfälle brauchen mehr Erklärungen)

### Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \textit{id})$  ist  $(\lambda y.\textit{id})$

### Vorsicht:

$((\lambda x.(\lambda y.x)) y)$  ist  $(\lambda y.y)?$

# Motivation zu Substitution

## Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$   $a$ : Idee der Berechnung:  
 Resultat  $s'$ , wobei:  
 $s'$  ist  $s$  wobei jedes  $x$  in  $s$  durch  $a$  ersetzt wird.  
 (i.a. richtig; Sonderfälle brauchen mehr Erklärungen)

### Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \textit{id})$  ist  $(\lambda y.\textit{id})$

### Vorsicht:

$((\lambda x.(\lambda y.x)) y)$  ist  $(\lambda y.y)?$  **NEIN**

# Substitution

$s[t/x]$  = Idee: ersetze alle freien Vorkommen von  $x$  in  $s$  durch  $t$

**Formale Definition** (genauer!)

$$\begin{aligned}
 x[t/x] &= t \\
 y[t/x] &= y, \text{ falls } x \neq y \\
 (\lambda y.s)[t/x] &= \begin{cases} \lambda y.(s[t/x]) & \text{falls } x \neq y \\ \lambda y.s & \text{falls } x = y \end{cases} \\
 (s_1 s_2)[t/x] &= (s_1[t/x] s_2[t/x])
 \end{aligned}$$

$$\text{Z.B. } (\lambda x.z x)[(\lambda y.y)/z] = (\lambda x.((\lambda y.y) x))$$

Bedingung:  $FV(t) \cap BV(s) = \emptyset$

# Substitution

$s[t/x]$  = Idee: ersetze alle freien Vorkommen von  $x$  in  $s$  durch  $t$

Was immer richtig ist:

- 1 Von innen her in jeder Abstraktion als Teilterm von  $s$  die gebundene Variable durch einen komplett neuen Variablennamen ersetzen.
- 2 Dann die Substitution ohne Vorsicht durchführen

Danach nochmal genauso umbenennen.

# Kontexte

- **Kontext** = Ausdruck, der an einer Position ein **Loch**  $[\cdot]$  anstelle eines Unterausdrucks hat

## Grammatik für Kontexte:

$$C = [\cdot] \mid \lambda V.C \mid (C \text{ Expr}) \mid (\text{Expr } C)$$

- Sei  $C$  ein Kontext und  $s$  ein Ausdruck  $s$ :  
 $C[s]$  = Ausdruck, in dem das Loch in  $C$  durch  $s$  ersetzt wird
- Beispiel:  $C = ([\cdot] (\lambda x.x))$ , dann:  $C[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) (\lambda x.x))$ .
- Das Einsetzen in Kontexte darf/kann freie Variablen einfangen:  
 z.B. sei  $C = (\lambda x.[\cdot])$ , dann  $C[\lambda y.x] = (\lambda x.\lambda y.x)$

# Alpha-Äquivalenz

## Alpha-Umbenennungsschritt

$$C[\lambda x.s] \xrightarrow{\alpha} C[\lambda y.s[y/x]] \text{ falls } y \notin BV(C[\lambda x.s]) \cup FV(C[\lambda x.s])$$

## Alpha-Äquivalenz

$=_{\alpha}$  ist die **reflexiv-transitive Hülle** von  $\xrightarrow{\alpha}$

- Wir betrachten  $\alpha$ -äquivalente Ausdrücke als inhaltlich **gleich**.
- z.B.  $\lambda x.x =_{\alpha} \lambda y.y$
- **D**istinct **V**ariable **C**onvention: Alle gebundenen Variablen sind verschieden und gebundene Variablen sind verschieden von freien Variablen.
- Es gibt immer eine Folge von  $\alpha$ -Umbenennungen, so dass die DVC danach erfüllt ist.

Beispiel zur DVC und  $\alpha$ -Umbenennung
$$(y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y))))$$

Beispiel zur DVC und  $\alpha$ -Umbenennung
$$(y (\lambda y. ((\lambda x. (x x)) (x y))))$$

$\implies$  erfüllt die DVC nicht.

# Beispiel zur DVC und $\alpha$ -Umbenennung

$$(y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y))))$$

$\implies$  erfüllt die DVC nicht.

$$\begin{aligned} & (y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y)))) \\ \xrightarrow{\alpha} & (y (\lambda y_1.((\lambda x.(x x)) (x y_1)))) \\ \xrightarrow{\alpha} & (y (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1 x_1)) (x y_1)))) \end{aligned}$$

$(y (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1 x_1)) (x y_1))))$  erfüllt die DVC

```
-- run erwartet den Ausdruck als String und reduziert alle Redexe
run str = printExp $ reduce (parse str)

-- runNO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Normalordnung
runNO str = printExp $ reduceNO (parse str)

-- runAO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Anwendungsordnung
runAO str = printExp $ reduceAO (parse str)

-- dvc erwartet den Ausdruck als String und prüft, ob der Ausdruck die
-- Distinct Variable Convention erfüllt
dvc str = dvcexp (parse str)

-- fv erwartet den Ausdruck als String und berechnet das Paar: (gebundene Variablen, freie Variablen)
fv str = fvexp (parse str)

-- alphaEqual s t erwartet zwei Ausdrücke und testet, ob diese alpha-äquivalent sind
alphaEqual s t = alphaeq s t

-- dvcTrans erwartet den Ausdruck als String und berechnet einen
-- alpha-äquivalenten der die dvc erfüllt.
dvcTrans s
```

# Substitution: Nochmal genauer

$$\begin{aligned} s[t/x] &= \text{ersetze alle freien Vorkommen von } x \text{ in } s \text{ durch } t, \\ &\text{falls } FV(t) \cap BV(s) = \emptyset. \\ &= s'[t/x], \text{ sonst;} \\ &\text{wobei } s' \text{ aus } s \text{ durch } \alpha\text{-Umbenennung entsteht,} \\ &\text{so dass } FV(t) \cap BV(s') = \emptyset. \end{aligned}$$

Wenn  $((\lambda x.s) t)$  die DVC erfüllt,  
dann sind die Bedingungen von Fall 1 erfüllt.

## Operationale Semantik - Beta-Reduktion

## Beta-Reduktion

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

Wenn  $e_1 \xrightarrow{\beta} e_2$ , dann sagt man  $e_1$  **reduziert unmittelbar** zu  $e_2$ .

# Operationale Semantik - Beta-Reduktion

## Beta-Reduktion

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

Wenn  $e_1 \xrightarrow{\beta} e_2$ , dann sagt man  $e_1$  **reduziert unmittelbar** zu  $e_2$ .

Beispiele:

$$(\lambda x. \underbrace{x}_s) \underbrace{(\lambda y.y)}_t \xrightarrow{\beta} x[(\lambda y.y)/x] = \lambda y.y$$

$$(\lambda y. \underbrace{y y y}_s) \underbrace{(x z)}_t \xrightarrow{\beta} (y y y)[(x z)/y] = (x z) (x z) (x z)$$

# Beta-Reduktion: Umbenennungen

Damit die DVC nach einer  $\beta$ -Reduktion gilt, muss man (manchmal) umbenennen:

$$(\lambda x.(x x)) (\lambda y.y) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y) (\lambda y.y) =_{\alpha} (\lambda y_1.y_1) (\lambda y_2.y_2)$$

Das wird bei mehreren Reduktionen hintereinander immer gemacht (aber nicht mehr erwähnt)

! In kompilierten Programmen ist diese Operation nicht notwendig

# Operationale Semantik

- Für die **Festlegung der operationalen Semantik** (D.h. der Auswertung von Ausdrücken) des Lambda-Kalküls muss man noch definieren, **wo** in einem Ausdruck (an welcher Stelle im Syntaxbaum) die  $\beta$ -Reduktion angewendet wird
- Betrachte  $((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))$ .  
Zwei Möglichkeiten:
  - $\underline{((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))} \rightarrow ((\lambda y.y)(\lambda z.z)) ((\lambda y.y)(\lambda z.z))$   
oder
  - $((\lambda x.xx)\underline{((\lambda y.y)(\lambda z.z))}) \rightarrow ((\lambda x.xx)(\lambda z.z))$ .

# Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

# Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

## Definition

- **Reduktionskontexte**  $R ::= [\cdot] \mid (R \text{ Expr})$
- $\xrightarrow{no}$ : Wenn  $s \xrightarrow{\beta} t$ , **dann** ist

$$R[s] \xrightarrow{no} R[t]$$

eine **Normalordnungsreduktion**

# Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

## Definition

- **Reduktionskontexte**  $R ::= [\cdot] \mid (R \text{ Expr})$
- $\xrightarrow{no}$ : Wenn  $s \xrightarrow{\beta} t$ , dann ist

$$R[s] \xrightarrow{no} R[t]$$

eine **Normalordnungsreduktion**

Beispiel:  $\xrightarrow{\beta}$

$$\begin{aligned}
 & ((\lambda x.(x x)) (\lambda y.y)) ((\lambda w.w) (\lambda z.(z z))) \\
 &= (x x)[(\lambda y.y)/x] ((\lambda w.w) (\lambda z.(z z))) \\
 &= ((\lambda y.y) (\lambda y.y)) ((\lambda w.w) (\lambda z.(z z))) \\
 &R = ([\cdot] ((\lambda w.w) (\lambda z.(z z))))
 \end{aligned}$$

# Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung:  $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei  $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für  $s$ “, d.h.  $R$  mit  $R[t] = s$  für irgendein  $t$ , sind:

- $R = [\cdot]$ , Term  $t$  ist  $s$  selbst,  
für  $s$  ist aber keine  $\beta$ -Reduktion möglich

# Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung:  $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei  $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für  $s$ “, d.h.  $R$  mit  $R[t] = s$  für irgendein  $t$ , sind:

- $R = [\cdot]$ , Term  $t$  ist  $s$  selbst,  
für  $s$  ist aber keine  $\beta$ -Reduktion möglich
- $R = ([\cdot] ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$ ,  
Term  $t$  ist  $((\lambda w.w) (\lambda y.y))$

Reduktion möglich:  $((\lambda w.w) (\lambda y.y)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)$ .

$s = R[((\lambda w.w) (\lambda y.y))] \xrightarrow{no} R[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$

# Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung:  $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei  $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für  $s$ “, d.h.  $R$  mit  $R[t] = s$  für irgendein  $t$ , sind:

- $R = [\cdot]$ , Term  $t$  ist  $s$  selbst,  
für  $s$  ist aber keine  $\beta$ -Reduktion möglich
- $R = ([\cdot] ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$ ,  
Term  $t$  ist  $((\lambda w.w) (\lambda y.y))$   
Reduktion möglich:  $((\lambda w.w) (\lambda y.y)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)$ .  
 $s = R[((\lambda w.w) (\lambda y.y))] \xrightarrow{no} R[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$
- $R = ([\cdot] (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$ ,  
Term  $t$  ist  $(\lambda w.w)$ ,  
für  $(\lambda w.w)$  ist keine  $\beta$ -Reduktion möglich.

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((((\lambda x.x) (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))^*$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((((\lambda x.x) (\lambda y.(y y)))^* (\lambda z.z)))$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y)))) (\lambda z.z))$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2:  $((y z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)^*$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2:  $((y z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))^* (\lambda u.u)$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2:  $((y z)^* ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2:  $((y^* z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)$

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $(((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z))$
- Beispiel 2:  $((y^* z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)$

Allgemein:  $(s_1 s_2 \dots s_n)^*$  hat das Ergebnis  $(s_1^* s_2 \dots s_n)$ , wobei  $s_1$  keine Anwendung

# Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- $s$  ein Ausdruck.
- Start:  $s^*$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1:  $((\lambda x.x)^* (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2:  $((y^* z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)$

Allgemein:  $(s_1 s_2 \dots s_n)^*$  hat das Ergebnis  $(s_1^* s_2 \dots s_n)$ , wobei  $s_1$  keine Anwendung

Falls  $s_1 = \lambda x.t$  und  $n \geq 2$  dann reduziere:

$$((\lambda x.t) s_2 s_3 \dots s_n) \xrightarrow{no} (t[s_2/x] s_3 \dots s_n)$$

# Beispiel

$$(((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u))^*$$

# Beispiel

$$\begin{aligned}
 & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))(\lambda u. u))^* \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^*(\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^*((\lambda w. w)(\lambda z. z)))(\lambda u. u)) \\
 \xrightarrow{no} & ((\lambda y. ((\lambda w. w)(\lambda z. z)))(\lambda u. u))^* \\
 \Rightarrow & ((\lambda y. ((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^*(\lambda u. u)) \\
 \xrightarrow{no} & ((\lambda w. w)(\lambda z. z))^* \\
 \Rightarrow & ((\lambda w. w)^*(\lambda z. z)) \\
 \xrightarrow{no} & (\lambda z. z)
 \end{aligned}$$

# Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (1)

## Die Normalordnungsreduktion ist deterministisch:

Für jeden Ausdruck  $s$  gibt es **höchstens** ein  $t$   
 (modulo  $\alpha$ -Gleichheit),  
 so dass  $s \xrightarrow{no} t$ .

## Ausdrücke, für die keine Reduktion möglich ist:

- Reduktion stößt auf freie Variable: z.B.  $(x (\lambda y.y))$   
 (nicht bei geschlossenen Ausdrücken)
- Ausdruck ist eine **WHNF** (weak head normal form), d.h. im  
 Lambda-Kalkül eine Abstraktion.
- Genauer: Ausdruck ist eine **FWHNF**:  
 FWHNF = Abstraktion  
 (functional weak head normal form)

# Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (2)

Weitere Notationen:

$\xrightarrow{no,+}$  = transitive Hülle von  $\xrightarrow{no}$   
(mehrere  $\xrightarrow{no}$  nacheinander)

$\xrightarrow{no,*}$  = reflexiv-transitive Hülle von  $\xrightarrow{no}$   
(keines oder mehrere  $\xrightarrow{no}$  nacheinander)

## Definition

Ein Ausdruck  $s$  **konvergiert** ( $s \Downarrow$ ) gdw.  $\exists$ FWHNF  $v : s \xrightarrow{no,*} v$ .  
Andernfalls **divergiert**  $s$ , Notation  $s \Uparrow$

Die Begriffe “konvergieren” (zu einem Wert) und “divergieren” (terminiert nicht) sind aus der wiss. Literatur.

# Anmerkungen

- (pures) Haskell verwendet den call-by-name Lambda-Kalkül als **semantische Grundlage**  
(man braucht noch Erweiterungen ...)
- Implementierungen verwenden die **call-by-need** Variante:  
Vermeidung von Doppelauswertungen (kommt später)
- Call-by-name und call-by-need sind äquivalent (exakte Def kommt noch).
- Call-by-name (und auch call-by-need) sind optimal bzgl. Konvergenz:

## Aussage (Standardisierung)

Sei  $s$  ein Lambda-Ausdruck. Wenn  $s$  mit **beliebigen**  $\beta$ -Reduktionen (an beliebigen Positionen, nacheinander ausgeführt) in eine Abstraktion  $v$  überführt werden kann, dann gilt  $s \Downarrow v$ .

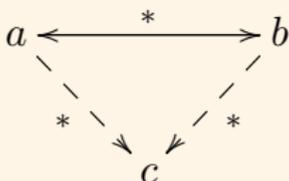
# Church-Rosser Theorem

Für den Lambda-Kalkül gilt (unter der Gleichheit  $=_{\alpha}$ )

## Satz (Konfluenz)

### Church-Rosser Eigenschaft:

Wenn  $a \leftrightarrow^* b$ , dann existiert  $c$ , so dass  $a \rightarrow^* c$  und  $b \rightarrow^* c$



Hierbei bedeutet:

$\rightarrow^*$  beliebige Folge von  $\beta$ -Reduktionen (in bel. Kontext), und

$\leftrightarrow^*$  beliebige Folge von  $\beta$ -Reduktionen (vorwärts und rückwärts) (in bel. Kontext)

# Anwendungsordnung im Lambda-Kalkül

Diese (“strikte”) Reduktionsstrategie wird verwendet in Programmiersprachen die strikt auswerten.

z.B. Wenn  $x = 3$ ,  $y = 2$ :

$$\begin{aligned} 3 + (x*x - y*y) &\rightarrow 3 + (9 - 2*2) \rightarrow 3 + (9 - 4) \\ &\rightarrow 3 + 5 \rightarrow 8 \end{aligned}$$

D.h. erst das Argument, dann die Funktionsanwendung.

- Sprechweisen: Anwendungsordnung, **call-by-value (CBV)**, **strikt**
- **Grobe Umschreibung:**  
Argumentauswertung vor Definitionseinsetzung

# Anwendungsordnung im Lambda-Kalkül

## Call-by-value Beta-Reduktion

$$(\beta_{cbv}) \quad (\lambda x. s) v \rightarrow s[v/x],$$

nur wenn  $v$  Abstraktion oder Variable

## Definition

CBV-Reduktionskontexte  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{E} \mathbf{Expr}) \mid ((\lambda V. \mathbf{Expr}) \mathbf{E})$$

Wenn  $s \xrightarrow{\beta_{cbv}} t$ ,

dann ist  $E[s] \xrightarrow{ao} E[t]$  eine **Anwendungsordnungsreduktion**

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
 falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))^*$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))) u)^* (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
 falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z))))^* u) (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $((((\lambda x.x)^* (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))^*) u) (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
 falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v)^* (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y)^* v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

# CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit  $s^*$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
  - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
  - $(v^* s_1) \Rightarrow (v s_1^*)$   
falls  $v$  eine Abstraktion und  
 $s$  keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel:  $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y)^* v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

Falls danach gilt:  $C[(\lambda x.s)^* v]$  dann

$$C[(\lambda x.s)^* v] \xrightarrow{ao} C[s[v/x]]$$

# Beispiel

$$\begin{aligned}
 & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))(\lambda u. u))^* \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^*(\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^*((\lambda w. w)(\lambda z. z)))(\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z))^*)(\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)^*(\lambda z. z)))(\lambda u. u))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{ao} & (((\lambda x. \lambda y. x)(\lambda z. z))(\lambda u. u))^* \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)(\lambda z. z))^*(\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^*(\lambda z. z))(\lambda u. u))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{ao} & ((\lambda y. \lambda z. z)(\lambda u. u))^* \\
 \Rightarrow & ((\lambda y. \lambda z. z)^*(\lambda u. u))
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{ao} (\lambda z. z)$$

# Eigenschaften

- Auch die call-by-value Reduktion ist deterministisch.

## Definition

Ein Ausdruck  $s$  **call-by-value konvergiert** ( $s \Downarrow_{ao}$ ), gdw.

$\exists$  FWHNF  $v : s \xrightarrow{ao,*} v$ .

Ansonsten (call-by-value) divergiert  $s$ , Notation:  $s \Uparrow_{ao}$ .

# Eigenschaften

- Auch die call-by-value Reduktion ist deterministisch.

## Definition

Ein Ausdruck  $s$  **call-by-value konvergiert** ( $s \Downarrow_{ao}$ ), gdw.

$\exists$  FWHNF  $v : s \xrightarrow{ao,*} v$ .

Ansonsten (call-by-value) divergiert  $s$ , Notation:  $s \Uparrow_{ao}$ .

- Es gilt:  $s \Downarrow_{ao} \implies s \Downarrow$ .
- Die Umkehrung gilt **nicht!**

$((\lambda y. (\lambda x. x)) \Omega) \Uparrow_{ao}$

aber

$(\lambda y. (\lambda x. x)) \Omega \Downarrow_{no}$

Wobei:  $\Omega = (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$

da:  $((\lambda y. (\lambda x. x)) \Omega) \rightarrow_{no} (\lambda x. x)$

# Eigenschaften

Vorteile der Anwendungsordnung (call-by-value):

- Tlw. besseres Platzverhalten
- Auswertungsreihenfolge liegt fest:  
(im Syntaxbaum von Funktionen  $f$ ); bzw. ist innerhalb jeder Funktionsdefinition vorhersagbar.  
**Bei AO:**  $f s_1 s_2 s_3$ : immer zuerst  $s_1$ , dann  $s_2$ , dann  $s_3$ , dann  $(f s_1 s_2 s_3)$   
**Bei NO:** zum Beispiel: zuerst  $s_1$ , dann evtl. abhängig vom Wert von  $s_1$ :  
zuerst  $s_2$ , dann  $s_3$ , oder andersrum,  
oder evtl. weder  $s_2$  noch  $s_3$ .  
Dazwischen auch Auswertung von Anteilen von  $(f s_1 s_2 s_3)$ .
- Wegen der vorhersagbaren Auswertungsreihenfolge (in Funktionsdefinitionen) unter AO:  
Seiteneffekte können unter AO kompiliert werden; und sind nicht abhängig von Bedingungen.

# In Haskell: seq

In Haskell: (Lokale) strikte Auswertung kann mit `seq` erzwungen werden.

$$\begin{aligned} \text{seq } a \ b &= b && \text{falls } a \Downarrow \\ (\text{seq } a \ b) &\Uparrow && \text{falls } a \Uparrow \end{aligned}$$

- in Anwendungsordnung ist `seq` kodierbar, aber unnötig
- in Normalordnung:
  - seq kann nicht im Lambda-Kalkül kodiert werden!
  - seq kann auch nicht in erweiterten Kernsprachen kodiert werden!
  - seq muss also **explizit** in Haskell eingebaut werden.

# Beispiel zu seq in Haskell

```
fak 0 = 1
fak x = x * fak(x-1)
```

Auswertung von fak n:

```
fak n
→ n * fak (n-1)
→ n * ((n-1) * fak (n-2))
→ ...
→ n * ((n-1) * ((n-2) * .... * (2 * 1)))
→ n * ((n-1) * ((n-2) * .... * 2))
→ ...
```

Problem: Linearer Platzbedarf

# Beispiel zu seq (2)

Version mit seq:

```
fak' x      = fak'' x 1
```

```
fak'' 0 y = y
```

```
fak'' x y = let m = x*y in seq m (fak'' (x-1) m)
```

Auswertung in etwa:

```
fak' 5
→ fak'' 5 1
→ let m=5*1 in seq m (fak'' (5-1) m)
→ let m=5 in seq m (fak'' (5-1) m)
→ (fak'' (5-1) 5)
→ (fak'' 4 5)
→ let m = 4*5 in seq m (fak'' (4-1) m)
→ let m = 20 in seq m (fak'' (4-1) m)
→ (fak'' (4-1) 20)
→ ...
```

Jetzt: konstanter Platzbedarf, da Zwischenprodukt  $m$  berechnet wird (erzwungen durch `seq`) und sharing mittels `let`.

# Beispiele

- $\Omega := (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$ .
- $\Omega \xrightarrow{no} \Omega$ . Daraus folgt:  $\Omega \uparrow$
- $\Omega \xrightarrow{ao} \Omega$ . Daraus folgt:  $\Omega \uparrow_{ao}$ .
- $t := ((\lambda x.(\lambda y.y)) \Omega)$ .
- $t \xrightarrow{no} \lambda y.y$ , d.h.  $t \Downarrow$ .
- $t \xrightarrow{ao} t$ , also  $t \uparrow_{ao}$  denn die Anwendungsordnung muss zunächst das Argument  $\Omega$  auswerten.

# Hinweise zur verzögerten Auswertung

- Sprechweisen: Verzögerte Auswertung, **call-by-need**, **nicht-strikt**, **lazy**, (Reduktion mit Sharing)
- Optimierung der Normalordnungsreduktion

Verzögerte Auswertung kann durch Erweiterung des Lambda-Kalküls mit `let` modelliert werden:

**Call-by-need Lambda-Kalkül mit `let`-Syntax:**

**Expr ::= V |  $\lambda V.$ Expr | (Expr Expr) | `let V = Expr in Expr`**

- Zur Modellierung des sharing (von call-by-need) reicht die einfachere Variante eines **nicht-rekursiven** `let`:  
in `let x = s in t` muss gelten  $x \notin FV(s)$  (siehe Skript)
- Aber: **Haskell** verwendet **rekursives `let`!**  
(deswegen komplizierter zu beschreiben und zu erklären)

# Einschub: Programmieren mit let in Haskell

- let in Haskell ist **viel allgemeiner** als das einfache nicht-rekursive let.
- Haskell's let für **lokale Funktionsdefinitionen**:

$$\begin{aligned}
 \text{let } f_1 x_{1,1} \dots x_{1,n_1} &= e_1 \\
 f_2 x_{2,1} \dots x_{2,n_2} &= e_2 \\
 &\dots \\
 f_m x_{m,1} \dots x_{m,n_m} &= e_m \\
 \text{in } \dots
 \end{aligned}$$

Definiert die Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  (auch verschränkt rekursiv)

Beispiel:

```
f x y = let quadrat z = z*z
         in quadrat x + quadrat y
```

# Rekursives let in Haskell

**Verschränkt-rekursives** let erlaubt:

```

quadratfakultaet x =
  let quadrat z = z*z
      fakq    0 = 1
      fakq    x = (quadrat x)*fakq (x-1)
  in fakq x
  
```

**Sharing** von Ausdrücken mittels let:

```

verdoppelfak x =
  let fak 0 = 1
      fak x = x*fak (x-1)
      fakx = fak x
  in fakx + fakx
  
```

```

verdoppelfakLangsam x =
  let fak 0 = 1
      fak x = x*fak (x-1)
  in fak x + fak x
  
```

verdoppelfak 100 berechnet nur einmal fak 100, im Gegensatz zu verdoppelfakLangsam.

# Pattern-Matching mit let

Links in einer let-Bindung in Haskell darf auch ein **Pattern** stehen.

Beispiel:  $\sum_{i=1}^n i$  und  $\prod_{i=1}^n i$  in einer rekursiven Funktion:

```
sumprod 1 = (1,1)
sumprod n = let (s',p') = sumprod (n-1)
             in (s'+n,p'*n)
```

Das Paar aus dem rekursiven Aufruf wird mit Pattern Matching am let zerlegt!

# Memoization

## Beispiel: Fibonacci-Zahl

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib i = fib (i-1) + fib (i-2)
```

sehr schlechte Laufzeit!

$n$	gemessene Zeit im ghci für fib $n$
30	9.75sec
31	15.71sec
32	25.30sec
33	41.47sec
34	66.82sec
35	108.16sec

# Memoization (2)

Besser:

```

-- Fibonacci mit Memoization
fibM i =
  let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
  in fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
  
```

$n$	gemessene Zeit im ghci für fibM $n$
1000	0.05sec
10000	1.56sec
20000	7.38sec
30000	23.29sec

Bei mehreren Aufrufen, noch besser:

```

fibM' =
  let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
  in \i -> fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
  
```

# where-Ausdrücke (1)

where-Ausdrücke sind ähnlich zu let.

Z.B.

```
sumprod' 1 = (1,1)
sumprod' n = (s'+n,p'*n)
  where (s',p') = sumprod' (n-1)
```

## where-Ausdrücke (2)

Beachte: (`let ... in e`) ist ein **Ausdruck**, aber `e where ...` nicht  
 where kann man um Guards herum schreiben (`let` nicht):

```
f x
| x == 0      = a
| x == 1      = a*a
| otherwise   = a*f (x-1)
where a = 10
```

Dafür geht

```
f x = \y -> mul
      where mul = x * y
```

**nicht!** (da `y` nicht bekannt in der `where`-Deklaration)

# Gleichheit

Kalküle bisher:

- Call-by-Name Lambda-Kalkül: Ausdrücke,  $\xrightarrow{no}$ ,  $\Downarrow$
- Call-by-Value Lambda-Kalkül: Ausdrücke,  $\xrightarrow{ao}$ ,  $\Downarrow_{ao}$
- (Call-by-Need Lambda-Kalkül ...)

D.h. Syntax + Operationale Semantik.

Es fehlt:

- Begriff: Wann sind zwei Ausdrücke gleich(wertig)?
- D.h. insbesondere: Wann darf ein Compiler einen Ausdruck durch einen anderen ersetzen?

# Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke  $s, t$  sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler:  $s, t$  sind gleich, wenn für alle Kontexte  $C$  gilt:  
 $C[s]$  und  $C[t]$  **verhalten sich gleich**.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

# Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke  $s, t$  sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler:  $s, t$  sind gleich, wenn für alle Kontexte  $C$  gilt:  
 $C[s]$  und  $C[t]$  verhalten sich gleich.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

# Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke  $s, t$  sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler:  $s, t$  sind gleich, wenn für alle Kontexte  $C$  gilt:  
 **$C[s]$  und  $C[t]$  verhalten sich gleich.**
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

# Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke  $s, t$  sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler:  $s, t$  sind gleich, wenn für alle Kontexte  $C$  gilt:  
 **$C[s]$  und  $C[t]$  verhalten sich gleich.**
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

## Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$  gdw.  $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$

## Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$  gdw.  $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$
- $s \sim_c t$  gdw.  $s \leq_c t$  und  $t \leq_c s$

## Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$  gdw.  $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$
- $s \sim_c t$  gdw.  $s \leq_c t$  und  $t \leq_c s$

Call-by-Value Lambda-Kalkül:

- $s \leq_{c,ao} t$  gdw.  $\forall C : \text{Wenn } C[s], C[t] \text{ geschlossen sind und } C[s] \Downarrow_{ao}, \text{ dann auch } C[t] \Downarrow_{ao}.$
- $s \sim_{c,ao} t$  gdw.  $s \leq_{c,ao} t$  und  $t \leq_{c,ao} s$

# Gleichheit (4)

- $\sim_c$  und  $\sim_{ao}$  sind **Kongruenzen**
- **Kongruenz** = Äquivalenzrelation + kompatibel mit Kontexten, d.h.  $s \sim t \implies C[s] \sim C[t]$ .
- Gleichheit beweisen i.a. schwer, widerlegen i.a. einfach.

# Gleichheit (4)

- $\sim_c$  und  $\sim_{ao}$  sind **Kongruenzen**
- **Kongruenz** = Äquivalenzrelation + kompatibel mit Kontexten, d.h.  $s \sim t \implies C[s] \sim C[t]$ .
- Gleichheit beweisen i.a. schwer, widerlegen i.a. einfach.

Anmerkung zu „ $C[s], C[t]$  geschlossen“ bei  $\sim$

- $\sim_c$  ändert sich nicht beim Übergang auf  $C[s], C[t]$  geschlossen, aber  $\sim_{c,ao}$ .
- $\sim_{c,ao}$  wird auch in erweiterten Kalkülen so definiert, und:
- $\sim_{c,ao}$  hat unter der closed-Bedingung mehr sinnvolle Gleichheiten als ohne diese Bedingung (in den erweiterten Kalkülen)

# Gleichheit (5)

Beispiele für Gleichheiten, Ungleichheiten, Implikation von Relationen:

- $(\lambda x, y.x)(\lambda z.z) \sim_c \lambda y.(\lambda z.z)$ ,  
Allgemeiner:
- $(\beta) \subseteq \sim_c$
- $(\beta_{cbv}) \subseteq \sim_{c,ao}$  aber  $(\beta) \not\subseteq \sim_{c,ao}$
- $\sim_c \not\subseteq \sim_{c,ao}$  und  $\sim_{c,ao} \not\subseteq \sim_c$

### Praktische Bedeutung der Gleichheit:

- Compiler darf Gleiches durch Gleiches ersetzen!
- Kann zur Optimierung verwendet werden.
- Man braucht noch Wissen darüber, bzw. welche Variante unter bestimmten Bedingungen effizienter ist.