Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen

Zufall Programmieren

Prof. Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2023/24

Stand der Folien: 18. Dezember 2023

Übersicht

Probability und Funktionale Programmierung

Ideen

- Einführung einer Funktion `coin` die einem Münzwurf entspricht
  in einer lazy funktionalen Programmiersprache
- Mit programmierbarer Wahrscheinlichkeit;
- in KFPTS: Zahlen und andere Datentypen vorhanden
- Rekursive Funktionen sind programmierbar

Sichtweise

- Ein Programm modelliert ein Zufalls-Experiment

Basis - Zufalls - Funktion

`coin` $p \ \ s \ \ t$

- p: Wahrscheinlichkeit für s
  $0 \leq p \leq 1$ rationale Konstante.
  (Man kann auch beliebige rationalwertige Ausdrücke zulassen)
- s, t sind die beiden möglichen Ausdrücke die als Fortsetzung gewählt werden können.
- Auswertung von `coin` $p \ \ s \ \ t$ ist:
  - s mit Wahrscheinlichkeit p
  - t mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$

  und dann weitere Auswertung.

`coin` gibt es nicht in Haskell!

Probabilistische Ausführung von `coin`

- Auswertung von `coin` $p\ \ s\ \ t$:
- Es wird **nicht-deterministisch** s oder t ausgewählt.
  D.h. Jede Ausführung kann mal s oder auch t wählen.
- Was ist mit der Wahrscheinlichkeit p?
- Wahrscheinlichkeiten spielen nur eine Rolle bei **mehrmaliger** Auswertung:
  der erste Ausdruck hat Wahrscheinlichkeit p, der zweite $1 - p$.

- Ein Programm P hat eine theoretische Verteilung der Ergebnisse (inkl. Nichtterminierung)
- Viele Ausführungen des Programms nähern diese Verteilung an.
- Eine Ausführung des Programm kann nicht-terminieren:
  D.h. die Verteilung zu P beinhaltet eine Wahrscheinlichkeit für Nichtterminierung.

Probabilistisches Programm

`KFPTSProb` ist die folgende Sprache: KFPTS + `let` + `coin`.
Auswertung ist **call-by-need** s.u.:

Programm

- Ist ein Modell für ein Zufalls-Experiment
- Man kann diese Experimente kombinieren (pogrammieren)
- Man kann das Programm optimieren bzw. transformieren in ein äquivalentes Programm
- Programm ausführen entspricht einem Experiment
- Programme kombinieren: komplexere Experimente.

Probabilistische call-by-need Auswertung

Auswertung ist **call-by-need** in `KFPTSProb`.

(Normalordnungs-Reduktion mit Sharing)

Eine detaillierte exakte Definition siehe Literatur zu n.d. FP-calc.

Call-by-need Details und Prinzipien

1. Der Normalordnungs-Redex wird zuerst bestimmt.
2. Das `let` ist normalerweise mit mehreren Bindungen und rekursiv
3. Sharing wird modelliert durch let-Referenzen.
4. Da rekursives let; und Sharing zu beachten sind: genaue Reduktionsregeln sind leider einige und kompliziert

Probabilistische call-by-need Auswertung

Exkurs: call-by-need Auswertung

1. let-Ausdrücke im Fokus (d.h. Normalordnungs-Kontext) werden
   "nach oben" geschoben wenn nötig.
   vereinigt usw.
2. Bei LBeta und Case-Reduktion wird Einsetzung geshared (mittels let)
3. Beta Reduktion ist mit sharing:
   $(\lambda x.s)\ t \quad \to \quad \texttt{let}\ x = t\ \texttt{in}\ s$
4. Echt kopiert (d.h. verdoppelt) werden dürfen nur Abstraktionen $\lambda x.s$ und einfachste Konstruktorapplikationen der Form $c\ x_1 \ldots, x_n$
5. Man darf zwei textuelle getrennte Applikationen und `coin`-Aufrufe nicht mittels einer Programmtransformation "sharen".

Probabilistische call-by-need Auswertung

Einige Reduktionsregeln:

$(\lambda x.s)\ t \xrightarrow{lbeta} \texttt{let}\ x = t\ \texttt{in}\ s$

$(\texttt{case}\ (c\ s_1\ s_2)\ \texttt{of}\ (c\ x_1\ x_2) \to t; \ldots) \xrightarrow{lcase} \texttt{let}\ x_1 = s_1; x_2 = s_2\ \texttt{in}\ t$

$((\texttt{let}\ x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ s)\ t) \xrightarrow{let} (\texttt{let}\ x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ \ (s\ t))$

$((\texttt{let}\ x_1 = (\texttt{let}\ y_1 = r_1, \ldots, y_m = r_n\ \texttt{in}\ s_1), x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ r))$
$\xrightarrow{let}\ (\texttt{let}\ y_1 = r_1, \ldots, y_m = r_n,\ \ x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ \ r$

- Es gibt noch weitere Regeln um let-Bindungen nach oben zu verschieben

Probabilistische call-by-need Auswertung, Beispiel

```
let y = coin 0.75 1 2; z = coin 0.25 3 4 in
   let x = coin 0.5 y z in x*y+z
```

$\longrightarrow$

```
let y = coin 0.75 1 2; z = coin 0.25 3 4,
   x = coin 0.5 y z in x*y+z
```

$\longrightarrow$ x zuerst; Wahl: wird zu y. $p = 0.5$

```
let y = coin 0.75 1 2; z = coin 0.25 3 4,
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ y auswerten, $p = 0.5 * 0.25$

```
let y = 2; z = coin 0.25 3 4,
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ z auswerten, $p = 0.5 * 0.25 * 0.25$

```
let y = 2; z = 3,
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ 7, $p = 0.5 * 0.25 * 0.25 = 1/32$

Prob cb-need Auswertung, Beispiel Forts.

Anmerkungen

- Es kommen Bindungen $x = y$ vor:
  $\implies$ Kalkülregeln verfeinern, damit das abgedeckt ist.
- Es gibt 8 mögliche Ausführungen. Wahrscheinlichkeiten:
  $\{0.25, 0.75\} * \{0.25, 0.75\} * 0.5$
- Nur eine Möglichkeit ist auf der Folie.
- Auswertung hängt vom Ausdruck $x * y + z$ ab.
- Auswertung hängt auch vom Zufall ab:
  Wenn Ausdruck $= x$, dann wird y oder z ausgewertet.

Monte Carlo Simulation

eines Programms bzw. Ausdrucks in `KFPTSProb`:

1. Werte einen Ausdruck mehrfach aus.
2. Mache Statistik über alle Ergebnisse

Im Fall von `coin 0.5 0 1`:
Ergebnisliste ist eine Liste mit Einträgen $\in \{0, 1\}$.
Der Mittelwert der Ergebnisse geht gegen 0.5
Grenzwertsatz: Je mehr Versuche, desto näher ist der Mittelwert an 0.5.

Monte-Carlo Simulation von `coin p 0 1`:
Mittelwert der Ergebnisse geht gegen $1 - p$.

Probabilistischer Berechnungsbaum

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.
Berechnung aller Möglichkeiten erzeugt einen Baum!

- Wurzelknoten ist das Programm
- Die Kanten sind die normal-order Reduktionen, markiert mit den Wahrscheinlichkeiten
- Wenn `(coin p 0 1)` ausgewertet wird, hat der Knoten zwei Kinder.
- Die Blätter sind WHNFs.

Probabilistischer Baum zu einem Programm P hat Möglichkeiten:

- kann endlich sein
- kann unendlich groß sein
- kann unendliche lange Äste haben

Die **Wahrscheinlichkeit eines Astes**:
ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten an seinen Kanten.

Multi-Verteilung von P

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.

Definition: Die Multi-Verteilung zu P ist

Menge der Paare (s, p) zu allen Ästen.

- s ist eine WHNF am Ende eines Astes,
- p die Wahrscheinlichkeit des Astes

Terminierungs-Wahrscheinlichkeit $=$
Summe aller Wahrscheinlichkeiten in der Verteilung.
Terminierungs-Wahrscheinlichkeit $EC(P)$ von P:
$=$ Summe aller Wahrscheinlichkeiten aller endlichen Äste
Nichtterminierungs-Wahrscheinlichkeit von P:
Summe aller Wahrscheinlichkeiten aller unendlichen Äste

Simulationsprogramm dazu mit Multi-Verteilungen sind einfacher als mit Verteilungen
(insbesondere bei unendlichen Multi-Verteilungen.)

Nichtterminierung und Wahrscheinlichkeit

Folgerung: Es gibt programmierte Zufallsexperimente,
deren (rekursive) Ausführung
mit positiver Wahrscheinlichkeit
nicht terminiert.
und keine programmierte Schleife hat

(Ein Beispiel kommt noch)

Verteilung von P

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.

Berechnung der Verteilung

Eine **Verteilung** $EV(P)$ zum Programm P
kann man algorithmisch sinnvoll definieren,
wenn man die (Un-)Gleichheit aller WHNFs
an den Blättern des Berechnungsbaumes entscheiden kann.

Zum Beispiel:
Wenn man nur ganze (oder natürliche) Zahlen als Ausgänge hat.

Beispiel: Würfel

Fairer 6er Würfel

$$\texttt{wuerfel} \;=\; \texttt{coin}\ (1/6)\ 1\ (\texttt{coin}\ (1/5)\ 2\ (\texttt{coin}\ (1/4)\ 3\ (\texttt{coin}\ (1/3)\ 4\ (\texttt{coin}\ (1/2)\ 5\ 6)))))$$

Begründung dass das richtg ist:

- Münzwurf: Prob $1/6$ für 1 und $5/6$ der Rest.
- Dann: Prob $5/6 * 1/5$ für 2: d.h.
  $1/6$ für 2 und $4/6$ für den Rest.
- usw.

Beispiel: Zufallsprogramm zu diskreter Verteilung

Diskrete Verteilung, Programm verallgemeinert

$[(w_1, p_1), \ldots (w_n, p_n)]$

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{wuerfel} & = & \texttt{coin}\ (p_1)\ w_1 \\
 & & \quad (\texttt{coin}\ (p_2/(1-p_1))\ w_2 \\
 & & \qquad (\texttt{coin}\ (p_3/(1-p_1-p_2))\ w_2 \\
 & & \ldots
\end{array}
$$

Erwartungswert

Definition

Falls alle Ergebnisse Integer sind:
Erwartungswert $= \sum_i p_i * w_i$,
wenn $[(w_i, p_i), i = 1 \ldots, n]$ die Verteilung für Integer i ist.

Erwartungswert beim 6-Würfel ist $\sum_i i * p_i$, wobei
$[(1, 1/6), (2, 1/6), \ldots, (6, 1/6)]$
die Verteilung für den 6-Würfel ist.
Der Erwartungswert ist dann $1/6 * (\sum_{i=1}^{n} \; i) = 3.5$.

Vergleich der Auswertungsreihenfolgen

Verhalten bei beta-Reduktion:

- Call-by-value: Vor Reduktion muss das Argument ausgewertet werden.
- Call-by-name: Die Argumente werden bei beta-Reduktion in den Rumpf kopiert.
- Call-by-need: Die Argumente werden bei beta-Reduktion in den Rumpf kopiert, aber sind "geshared".

Resultate	call-by-value	call-by-need	call-by-name
$(\lambda x.1)\ \perp$	terminiert nicht	1	1
let w = coin 1 2 in w+ w	2,4	2,4	2,3,4

Wir benutzen in **KFPTSProb**:

Call-by-need Auswertung, wie in Haskell

Ein Beispiel mit unendlich vielen Werten

Erzeuge Werte 1,2,3,4,...
mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5, 0.25, 2^{-3}, 2^{-4},....

$$\begin{array}{lcl} \texttt{result} & = & \texttt{numbers}\ 1 \\ \texttt{numbers}\ n & = & \texttt{coin}\ 0.5\ n\ (\texttt{numbers}\ (n+1)) \end{array}$$

- Man erhält $EC(\texttt{result}) = 1$, d.h. Terminierung mit Wahrscheinlichkeit 1.
- Die Verteilung $EV(\texttt{result})$ ist: $\lambda i.2^{-i}$.
- Das Programm kann unendlich lange laufen, wenn $coin$ immer falsch fällt, aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist 0.

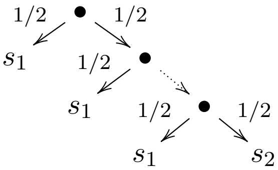
Nichtterminierung mit Wahrscheinlichkeit > 0

Beispiel-Programm das mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht terminiert. (K ist eine Abstraktion $\lambda x.\lambda y.x$.)

$$\begin{array}{l} s := \texttt{let}\ cprob\ i\ x\ y = if\ i = 0\ then\ x\ else \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{coin}\ 0.5\ (cprob\ (i{-}1)\ x\ y)\ \ y, \\ \qquad\quad gen\ i = cprob\ i\ K\ (gen\ (i{+}1)) \\ \qquad \texttt{in}\ gen\ 2 \end{array}$$

Die Graphiken zeigen die Verzweigung

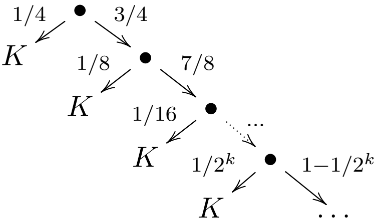
$cprob\ i\ s_1\ s_2$:



D.h., $cprob\ i\ s_1\ s_2$ wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2^i$ zu s_2 und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 1/2^i)$ zu s_1.

Nichtterminierung mit prob > 0, Forts.

$gen\ 2:$



Der Aufruf $(gen\ 2)$ wird mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ zu K
und mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ geht es dann mit $(gen\ 3)$ weiter.

Grobe Abschätzung:
Terminierung von (`gen 2`)
mit Wahrscheinlichkeit $< 1/4 + 1/8 + \ldots = 1/2$.

Nichtterminierung mit prob > 0, Forts.

- Exakt: (gen 2) terminiert mit Wahrscheinlichkeit $5/12$, also: (gen 2) terminiert nicht mit Wahrscheinlichkeit $7/12$, d.h. $> 50\%$.
- $\Rightarrow$ Es gibt Programme, die mit $W > 0$ nicht terminieren,
  - ohne eine direkte Schleife, nur durch den rekursiven Ablauf!
  - Und jeder rekursive Aufruf hat positive Erfolgswahrscheinlichkeit

Vergleich mit nicht-deterministischen FPS:

Die ND-Terminierungs-Begriffe (ohne Probability)

- may-convergent: Der Ausdruck hat eine Möglichkeit mit WHNF zu terminieren.
- may-divergent: Der Ausdruck hat eine Möglichkeit zu divergieren (d.h. unendlich oder jedes Ende ist keine WHNF)
- must-convergent: Jede Reduktionsfolge endet mit einer WHNF.
- must-divergent: keine Reduktionsfolge endet mit einer WHNF.
- should-convergent: Jeder Reduktionsnachfolger ist may-convergent.

Unterschied ND vs. Probabilistisch

- Es gibt should-konvergente geschlossene Ausdrücke, die mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit nicht terminieren
- Es gibt may-divergente Ausdrücke, die mit Wahrscheinlichleit 1 konvergieren.

Programmtransformationen in `KFPTSProb`

Was bedeutet **gleiches Programm** in `KFPTSProb` ?

Dazu: Genaue Beschreibung der Sprache notwendig!
und: Begriff: semantisch gleiche (Unter)programme

- Man kann die Kernsprache KFPTS von Haskell nehmen, mit lambda, case, Konstruktoren usw. und call-by-need Auswertung.
- kann getypt oder auch ungetpyt sein.
- Rekursion kann man mit dem let(rec) erreichen bzw. mit der rekursiven Definition der Superkombinatoren.
- Zusätzlich gibt es den Münzwurf $(\texttt{coin}\ p\ s\ t)$, wobei p rationaler Ausdruck ist.
  Bei $p \leq 0$ ist es wie Wahrscheinlichkeit 0, und bei $p \geq 1$ wie Wahrscheinlichkeit 1.

Programmtransformationen in KFPTSProb

Basisbegriff: *EC*: (expected convergence)
Erwartungswert für Terminierung (bzw. Konvergenz)

Definition

$s \sim_{c,P} t$ wenn für alle Kontexte C: $EC(C[s]) = EC(C[t])$, d.h. wenn die Konvergenzwahrscheinlichkeit sich nicht ändert, wenn man s durch t ersetzt oder umgekehrt. Mit Kontext C sind KFPTSProb-Programme gemeint, die eine Leerstelle haben.

- Man kann ziemlich viele Programmtransformationen KFPTSProb als korrekt nachweisen.
- d.h. man kann Programme umformen, weiter auswerten usw., mittels korrekter Transformationen!
- Natürlich darf man intern (im Compiler) nicht die Münzwürfe ausführen.

Verteilungsäquivalenz in `KFPTSProb`

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Definition

Zwei offene Programme P, Q mit main' sind äquivalent, wenn für jedes Programm R die Konkatenation $P|R$ (mit main) und $Q|R$ die gleiche Wahrscheinlichkeit der Konvergenz haben.

Welche Programmtransformationen sind korrekt?

Man kann zeigen, dass in `KFPTSProb` folgende korrekt sind:

- LBeta-Reduktion
- LCase-Reduktion

Vertauschung der Ausdrücke in `coin` Ausdrücken ist vermutlich auch korrekt

Verteilungsäquivalenz in `KFPTSProb`

Definition

Zwei geschlossene (getypte) Programme P_1, P_2 sind Verteilungs-äquivalent,
$P_1 \sim_V P_2$
wenn sie die gleiche Verteilung der Werte erzeugen.

Unter weiteren Vorraussetzungen an die genaue Definition der Programmiersprache `KFPTSProb` gilt (vermutlich):

- Kontextuelle Äquivalenz ist äquivalent zu Verteilungsäquivalenz.

Beweis ist schwierig, da Verteilungsäquivalenz ohne Kontexte definiert ist, aber Kontextuelle Äquivalenz mit allen Kontexten.

Fazit und Ausblick

Welche weiteren Vorteile hat das lazy (call-by-need) probabilistic Programmieren?

- Die Programme sind unmittelbar geeignet zur zufälligen Auswertung mittels Monte-Carlo Methode.
- Man kann in nicht zu komplizierten Fällen deren Konvergenz-Wahrscheinlichkeit oder die Verteilung direkt bestimmen, ohne Monte-Carlo Methoden zu verwenden.
- Es gibt eine umfangreiche Forschung und Literatur zur probabilistischen Programmierung, wobei es zu lazy funktionalen Programmiersprachen noch nicht soviele Untersuchungen gibt.

Haskell Bibliothek probability

Die Haskell Bibliothek `.../packages/probability` hat den Ansatz, aus gegebenen diskreten Verteilungen weitere diskrete Verteilungen zu Zufallsprozessen zu berechnen.
Das hat Vor- und Nachteile:

- Man kann weitere Zufallsprozesse zusammensetzen und berechnet direkt deren Verteilung. z.B. die Verteilung der Ergebnisse wenn man zwei Würfel wirft.
- Es gibt weitere (auch direkt programmierbare) Kombinationsmöglichkeiten von Zufallsvariablen, bzw. deren Verteilungen.
- Diese Sichtweise ist etwas anders als die direkte (rekursive) Programmierung von Zufallsexperimenten. Es ist damit leichter, Verteilungen zu berechnen, aber es ist vermutlich nicht so allgemein wie die direkte Programmierung.

Haskell Bibliothek probability

Warum Multiverteilungen?

- Die Berechnung von Verteilungen liefert erstmal eine "Multi-Verteilung", d.h. zu einem x können mehrere Einträge $(x, p_1), (x, p_2)$ in der Verteilung sein.
- Zum Beispiel die unendliche Verteilung V:
  $[(1, 0.5), (2, 1/4), (3, 1/8), \ldots]$
  liefert für das Produkt von zwei Zahlen:
  1*1 mit $1/4$, aber für $1 * 2 = 2$ zwei Einträge:
  $(1 * 2, 1/8)$ und $(1 * 2, 1/8)$ zusammen $(2, 1/4)$.
  Multiverteilungen sind einfacher zu berechnen.

Literatur-Auswahl

- (Übersichtsartikel) Ugo Dal Lago. 2020. On Probabilistic Lambda-Calculi. Cambridge University Press, 121-144. https://doi.org/10.1017/9781108770750.005
- (Artikel zum Anwendungspotential) Goodman, N. D., Tenenbaum, J. B., & Gerstenberg, T. (2014). Concepts in a probabilistic language of thought. Center for Brains, Minds and Machines (CBMM).
- (Konferenzartikel zu call-by-need probabilistic programs) D. Sabel, M. Schmidt-Schauß, and L. Maio. 2022. Contextual Equivalence in a Probabilistic Call-by-Need Lambda-Calculus. In 24th PPDP 2022, Tbilisi, Georgia. ACM, New York, NY, USA, 15 pages. https://doi.org/10.1145/3551357.3551374
- (Implementierung in Haskell) Luca Maio, The Probabilistic Lambda Calculus with Call-by-Need-Evaluation, thesis, LMU München, 2021
- Martin Erwig, Steve Kollmannsberger, J. Funct. Program. 16(1): 21–34 (2006) web.engr.oregonstate.edu/(tilde)erwig/papers/PFP_JFP06.pdf

Literatur-Auswahl 2.

- Artikel zur Programmäquivalenz: in einer probabilistischen, getypten funktionalen Programmiersprache, analog zu `KFPTSprob` (2023)
  M. Schmidt-Schauß, D. Sabel, Program equivalence in a typed probabilistic call-by-need functional language, J. Log. Algebraic Methods Program. 135, 2023,
  `https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2023.100904`

Bibliotheken und Software

- Haskell probability:
  https://hackage.haskell.org/packages/probability
- Die Webseite zum Haskell Code der functional pearl zu probability von Martin Erwig, Steve Kollmannsberger:
  https://web.engr.oregonstate.edu/{tilde}erwig/pfp/