

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen:

Die KFP-Kernsprachen

Prof. Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2022/23

Übersicht

- 1 Einleitung
- 2 KFPT
- 3 KFPTS
- 4 seq
- 5 Polymorphe Typen

Lambda-Kalkül und Haskell

Berechnung im **Lambda-Kalkül** ist universell.

Lambda-Kalkül und Haskell

Berechnung im **Lambda-Kalkül** ist universell.

ABER:

- Es ist sehr mühsam etwas zu programmieren
- Es ist ebenfalls mühsam aus der Ausgabe eine verständliche Antwort zu extrahieren.
- Sehr wenig intuitiv
- Kein automatischer Standard für z.B. Zahlen und Listen usw.
- Iteration und Rekursion nur über Fixpunkt-Kombinatoren

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als **Kernsprache für Haskell** eher ungeeignet:

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als **Kernsprache für Haskell** eher ungeeignet:

- **Keine echten Daten:**
Zahlen, Boolesche Werte, Listen und komplexe Datenstrukturen fehlen im Lambda-Kalkül.

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als **Kernsprache für Haskell** eher ungeeignet:

- **Keine echten Daten:**

Zahlen, Boolesche Werte, Listen und komplexe Datenstrukturen fehlen im Lambda-Kalkül.

Ausweg mittels **Church-Kodierung**?:

$$\text{z.B. } \text{true} = \lambda x, y. x$$

$$\text{false} = \lambda x, y. y$$

$$\text{if-then-else} = \lambda b, x_1, x_2. b \ x_1 \ x_2$$

$$\begin{aligned} \text{if-then-else } \text{true} \ e_1 \ e_2 &= (\lambda b, x_1, x_2. b \ x_1 \ x_2) \ (\lambda x, y. x) \ e_1 \ e_2 \\ &\xrightarrow{\text{no}, \beta, 3} (\lambda x, y. x) \ e_1 \ e_2 \xrightarrow{\text{no}, \beta, 2} e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if-then-else } \text{false} \ e_1 \ e_2 &= (\lambda b, x_1, x_2. b \ x_1 \ x_2) \ (\lambda x, y. y) \ e_1 \ e_2 \\ &\xrightarrow{\text{no}, \beta, 3} (\lambda x, y. y) \ e_1 \ e_2 \xrightarrow{\text{no}, \beta, 2} e_2 \end{aligned}$$

Lambda-Kalkül und Haskell

Aber: Kompliziert;

- Daten und Funktionen sind nicht unterscheidbar;
- Typisierung: ?
- passt nicht zur Intuition von verschiedenen Datentypen
- (und auch nicht zu Haskell)

Wie erkennt man:

- was ein Ergebnis bedeutet?
- wann sind zwei Ergebnisse gleich?
 - syntaktisch gleich ?
 - gleiche Funktionalität?

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- **Rekursive Funktionen??**: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

Fakultät als Beispiel:

$$\text{fak} = (\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))) \\ (\lambda f. \lambda x. \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)))$$

Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- **Rekursive Funktionen??**: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

Fakultät als Beispiel:

$$\text{fak} = (\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))) \\ (\lambda f. \lambda x. \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)))$$

Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

- **Typisierung fehlt!** Aber Haskell ist polymorph getypt.

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- **Rekursive Funktionen??**: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

Fakultät als Beispiel:

$$\text{fak} = (\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))) \\ (\lambda f. \lambda x. \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)))$$

Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

- **Typisierung fehlt!** Aber Haskell ist polymorph getypt.
- **Kein seq**: In Haskell ist seq verfügbar, im Lambda-Kalkül nicht kodierbar.

Kernsprachen für Haskell

- Im folgenden führen wir eine **Hierarchie** von **Kernsprachen** ein.
 $\lambda\text{-Kalkül} \subset \text{KFPT} \dots \subset \dots \text{Haskell}$
($\subset$ für Konstrukte, nicht die vollen Sprachen)
- Alle sind **Erweiterungen des Lambda-Kalküls**
- Bezeichnungen: **KFP**...
- KFP = Kern einer Funktionalen Programmiersprache

Die Kernsprache KFPT

- Erweiterung des Lambda-Kalküls um **Datentypen** (Konstruktoren) und **case**.
- **KFPT**: T steht für getyptes case
- Beachte: KFPT ist nur ganz schwach getypt.

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)

Beispiele

- Typ Bool,
- Typ List,

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von **Datenkonstruktoren**: Formale Notation: c_i .

Beispiele

- Typ Bool,
- Typ List,

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von **Datenkonstruktoren**: Formale Notation: c_i .

Beispiele

- Typ Bool, Datenkonstruktoren: True und False
- Typ List, Datenkonstruktoren: Nil und Cons

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von **Datenkonstruktoren**: Formale Notation: c_i .
- Datenkonstruktoren haben eine **Stelligkeit** $\text{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ ($\text{ar} = \text{„arity“}$)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von **Datenkonstruktoren**: Formale Notation: c_i .
- Datenkonstruktoren haben eine **Stelligkeit** $\text{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ (ar = „arity“)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`,
 $\text{ar}(\text{True}) = 0 = \text{ar}(\text{False})$.
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`,
 $\text{ar}(\text{Nil}) = 0$ und $\text{ar}(\text{Cons}) = 2$.

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von **Typen** (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von **Datenkonstruktoren**: Formale Notation: c_i .
- Datenkonstruktoren haben eine **Stelligkeit** $\text{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ (ar = „arity“)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`,
 $\text{ar}(\text{True}) = 0 = \text{ar}(\text{False})$.
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`,
 $\text{ar}(\text{Nil}) = 0$ und $\text{ar}(\text{Cons}) = 2$.

Haskell-Schreibweise: `[]` für `Nil` und `:` (infix) für `Cons`

Beachte $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ist Abkürzung für $a_1 : (a_2 : (\dots : (a_n : [])))$

Syntax von KFPT

Expr ::= V	(Variable)
$\lambda V.$ Expr	(Abstraktion)
(Expr ₁ Expr ₂)	(Anwendung)

Syntax von KFPT

Expr ::= V	(Variable)
$\lambda V. \text{Expr}$	(Abstraktion)
$(\text{Expr}_1 \text{ Expr}_2)$	(Anwendung)
$(c_i \text{ Expr}_1 \dots \text{Expr}_{\text{ar}(c_i)})$	(Konstruktoranwendung)
$(\text{case}_{\text{Typname}} \text{Expr of}$ $\quad \{ \text{Pat}_1 \rightarrow \text{Expr}_1; \dots; \text{Pat}_n \rightarrow \text{Expr}_n \})$	(case-Ausdruck)
Pat_i ::= $(c_i V_1 \dots V_{\text{ar}(c_i)})$	(Pattern für Konstruktor i)
wobei die Variablen V_i alle verschieden sind.	

Nebenbedingungen:

- case mit Typ gekennzeichnet,
- $\text{Pat}_i \rightarrow \text{Expr}_i$ heißt **case-Alternative**
- case-Alternativen sind vollständig und disjunkt für den Typ:
für jeden Konstruktor des Typs kommt genau eine Alternative vor.

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow y\}$$

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow ys\}$$

$\perp$ repräsentiert Fehler, z.B. Ω

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow ys\}$$

$\perp$ repräsentiert Fehler, z.B. Ω

Test, ob Liste leer ist (null):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \text{True}; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow \text{False}\}$$

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \perp; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow ys\}$$

$\perp$ repräsentiert Fehler, z.B. Ω

Test, ob Liste leer ist (null):

$$\lambda xs. \text{case}_{\text{List}} xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \text{True}; (\text{Cons } y \ ys) \rightarrow \text{False}\}$$

If-Then-Else:

if e then s else t :

$$\text{case}_{\text{Bool}} e \text{ of } \{\text{True} \rightarrow s; \text{False} \rightarrow t\}$$

Beispiele (2)

- Paare: Typ Paar mit zweistelligem Konstruktor Paar
Z.B. wird (True, False) durch (Paar True False)
dargestellt.
- Projektionen:

$$\begin{aligned}fst &:= \lambda x. \text{case}_{\text{Paar}} x \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\} \\snd &:= \lambda x. \text{case}_{\text{Paar}} x \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow b\}\end{aligned}$$

- Analog: mehrstellige Tupel
- In Haskell sind Tupel bereits vorhanden (eingebaut),
Schreibweise $(a_1, \dots, a_n)$
- In Haskell auch 0-stellige Tupel, keine 1-stelligen Tupel

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (1)

Vergleich mit Haskell's case-Ausdrücken

- Syntax ähnlich:
 - Statt $\rightarrow$ in Haskell: $\rightarrow$
 - Keine Typmarkierung am case

Beispiel:

- KFPT: `caseList xs of {Nil  $\rightarrow$  Nil; (Cons y ys)  $\rightarrow$  y}`
- Haskell: `case xs of []  $\rightarrow$  []; (y:ys)  $\rightarrow$  y`

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (1)

Vergleich mit Haskell's case-Ausdrücken

- Syntax ähnlich:
 - Statt $\rightarrow$ in Haskell: $->$
 - Keine Typmarkierung am case

Beispiel:

- KFPT: `caseList xs of {Nil  $\rightarrow$  Nil; (Cons y ys)  $\rightarrow$  y}`
- Haskell: `case xs of []  $\rightarrow$  []; (y:ys)  $\rightarrow$  y`
- In Haskell ist es **nicht notwendig alle Konstruktoren abzudecken**
- Kann Laufzeitfehler (in Haskell) geben:
(case True of False $\rightarrow$ False)
*** Exception: Non-exhaustive patterns in case

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (2)

- KFPT erlaubt nur disjunkte Pattern!
- Haskell erlaubt **überlappende Pattern** und **geschachtelte Pattern**. Z.B. ist

```
case [] of { [] -> []; (x:(y:ys)) -> [y]; x -> [] }
```

ein gültiger Haskell-Ausdruck

- Semikolon und Klammern kann man bei Einrückung weglassen:

```
case [] of
    [] -> []
    (x:(y:ys)) -> [y]
    x -> []
```

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (3)

Übersetzung von geschachtelten (Haskell) in einfache Pattern (für KFPT)

`case [] of {[] -> []; (x:(y:ys)) -> [y]}`

wird übersetzt in:

```
caseList Nil of {Nil → Nil;
                 (Cons x z) → caseList z of {Nil → ⊥;
                                             (Cons y ys) → (Cons y Nil)
                                             }
                 }
```

- Fehlende Alternativen werden durch $Pat \rightarrow \perp$ ergänzt.
- $\perp$ (gesprochen als „bot“): Repräsentant eines geschlossenen nicht terminierenden Ausdrucks.
- Abkürzung: $(case_{Typ} s \text{ of } Alts)$

Freie und gebundene Variablen in KFPT

Zusätzlich zum Lambda-Kalkül:

In einer case-Alternative

$$(c_i \ x_1 \ \dots \ x_{\text{ar}(c_i)}) \rightarrow s$$

sind die Variablen $x_1, \dots, x_{\text{ar}(c_i)}$ in s gebunden.

Freie Variablen

$$\begin{aligned}
 FV(x) &= x \\
 FV(\lambda x.s) &= FV(s) \setminus \{x\} \\
 FV(s \ t) &= FV(s) \cup FV(t) \\
 FV(c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) &= FV(s_1) \cup \dots \cup FV(s_{\text{ar}(c_i)}) \\
 FV(\text{case}_{Typ} \ t \ \text{of} &= FV(t) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (FV(s_i) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,\text{ar}(c_i)}\}) \right) \\
 \{ (c_1 \ x_{1,1} \ \dots \ x_{1,\text{ar}(c_1)}) \rightarrow s_1; & \\
 \dots & \\
 (c_n \ x_{n,1} \ \dots \ x_{n,\text{ar}(c_n)}) \rightarrow s_n \} &
 \end{aligned}$$

Gebundene Variablen

$$\begin{aligned}
 BV(x) &= \emptyset \\
 BV(\lambda x.s) &= BV(s) \cup \{x\} \\
 BV(s \ t) &= BV(s) \cup BV(t) \\
 BV(c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) &= BV(s_1) \cup \dots \cup BV(s_{\text{ar}(c_i)}) \\
 BV(\text{case}_{Typ} \ t \ \text{of} &= BV(t) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (BV(s_i) \cup \{x_{i,1}, \dots, x_{i,\text{ar}(c_i)}\}) \right) \\
 \{ (c_1 \ x_{1,1} \ \dots \ x_{1,\text{ar}(c_1)}) \rightarrow s_1; & \\
 \dots & \\
 (c_n \ x_{n,1} \ \dots \ x_{n,\text{ar}(c_n)}) \rightarrow s_n \} &
 \end{aligned}$$

Beispiel

$$s := ((\lambda x. \text{case}_{\text{List}} x \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow x; \text{Cons } x \text{ } xs \rightarrow \lambda u. (x \lambda x. (x u))\}) x)$$

$$FV(s) = \{x\} \text{ und } BV(s) = \{x, xs, u\}$$

Alpha-äquivalenter Ausdruck:

$$s' := ((\lambda x_1. \text{case}_{\text{List}} x_1 \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow x_1; \text{Cons } x_2 \text{ } xs \rightarrow \lambda u. (x_2 \lambda x_3. (x_3 u))\}) x)$$

$$FV(s') = \{x\} \text{ und } BV(s') = \{x_1, x_2, xs, x_3, u\}$$

Notationen in KFPT

Notationen in KFPT:

Wie im Lambda-Kalkül (mit angepasster FV , BV Definition)

- Offene und geschlossene Ausdrücke
- α -Umbenennung
- Distinct Variable Convention

Operationale Semantik von KFPT

Substitution

- $s[t/x]$ ersetzt alle freien Vorkommen von x in s durch t
(wenn $BV(s) \cap FV(t) = \emptyset$)
- $s[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ parallele Ersetzung von $x_1, \dots, x_n$ durch $t_1, \dots, t_n$ (wenn für alle $i: BV(s) \cap FV(t_i) = \emptyset$)

Operationale Semantik von KFPT

Substitution

- $s[t/x]$ ersetzt alle freien Vorkommen von x in s durch t
(wenn $BV(s) \cap FV(t) = \emptyset$)
- $s[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ parallele Ersetzung von $x_1, \dots, x_n$ durch $t_1, \dots, t_n$ (wenn für alle $i: BV(s) \cap FV(t_i) = \emptyset$)

Definition

Die einzigen Reduktionsregeln in KFPT sind (β) und (case):

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

$$\text{(case)} \quad \text{case}_{Typ} (c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) \text{ of } \{ \dots; (c \ x_1 \ \dots \ x_{\text{ar}(c)}) \rightarrow t; \dots \} \\ \rightarrow t[s_1/x_1, \dots, s_{\text{ar}(c)}/x_{\text{ar}(c)}]$$

Wenn $s \rightarrow t$ mit (β) oder (case) dann **reduziert s unmittelbar zu t**

Beispiel

$$(\lambda x. \text{case}_{\text{Paar}} x \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\}) (\text{Paar True False})$$

Beispiel

$$\begin{array}{l} (\lambda x. \text{case}_{\text{Paar}} x \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\}) (\text{Paar True False}) \\ \xrightarrow{\beta} \text{case}_{\text{Paar}} (\text{Paar True False}) \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\} \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & (\lambda x. \text{case}_{\text{Paar}} x \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\}) (\text{Paar True False}) \\
 \xrightarrow{\beta} & \text{case}_{\text{Paar}} (\text{Paar True False}) \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow a\} \\
 \xrightarrow{\text{case}} & \text{True}
 \end{aligned}$$

KFPT-Kontexte

Kontext = Ausdruck mit Loch $[\cdot]$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} ::= & [\cdot] \mid \lambda V. \mathbf{C} \mid (\mathbf{C} \text{ Expr}) \mid (\text{Expr } \mathbf{C}) \\
 & \mid (c_i \text{ Expr}_1 \dots \text{Expr}_{i-1} \mathbf{C} \text{ Expr}_{i+1} \text{Expr}_{\text{ar}(c_i)}) \\
 & \mid (\text{case}_{\text{Typ}} \mathbf{C} \text{ of } \{\text{Pat}_1 \rightarrow \text{Expr}_1; \dots; \text{Pat}_n \rightarrow \text{Expr}_n\}) \\
 & \mid (\text{case}_{\text{Typ}} \text{Expr} \text{ of } \{\text{Pat}_1 \rightarrow \text{Expr}_1; \dots; \text{Pat}_i \rightarrow \mathbf{C}; \dots, \text{Pat}_n \rightarrow \text{Expr}_n\})
 \end{aligned}$$

KFPT-Kontexte

Kontext = Ausdruck mit Loch $[\cdot]$

$$\begin{aligned}
 C ::= & [\cdot] \mid \lambda V. C \mid (C \text{ Expr}) \mid (\text{Expr } C) \\
 & \mid (c_i \text{ Expr}_1 \dots \text{Expr}_{i-1} C \text{ Expr}_{i+1} \text{Expr}_{\text{ar}(c_i)}) \\
 & \mid (\text{case}_{\text{Typ}} C \text{ of } \{\text{Pat}_1 \rightarrow \text{Expr}_1; \dots; \text{Pat}_n \rightarrow \text{Expr}_n\}) \\
 & \mid (\text{case}_{\text{Typ}} \text{Expr} \text{ of } \{\text{Pat}_1 \rightarrow \text{Expr}_1; \dots; \text{Pat}_i \rightarrow C; \dots, \text{Pat}_n \rightarrow \text{Expr}_n\})
 \end{aligned}$$

Wenn $C[s] \rightarrow C[t]$ wobei $s \xrightarrow{\beta} t$ oder $s \xrightarrow{\text{case}} t$, dann bezeichnet man s (mit seiner Position in C) als **Redex** von $C[s]$.

Redex = Reducible expression

Normalordnungsreduktion

Definition

Reduktionskontexte R in KFPT werden durch die folgende Grammatik erzeugt:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr}) \mid (\text{case}_{Typ} \mathbf{R} \text{ of } \mathbf{Alts})$$

Normalordnungsreduktionen finden in Reduktionskontexten statt

Normalordnungsreduktion

Definition

Reduktionskontexte R in KFPT werden durch die folgende Grammatik erzeugt:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr}) \mid (\text{case}_{Typ} \mathbf{R} \text{ of } Alts)$$

Normalordnungsreduktionen finden in Reduktionskontexten statt

Redexsuche mit $*$ zum Verschieben

- $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$

Neue Regel:

- $(\text{case}_{Typ} s \text{ of } Alts)^* \Rightarrow (\text{case}_{Typ} s^* \text{ of } Alts)$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})) (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))^*$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})) (\lambda u, v. v))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{\eta, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))^*$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{\eta, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}) \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True})^*$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}) \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right)^* \text{True}$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v) (\lambda w. w)) \text{True})^*$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v) (\lambda w. w))^* \text{True})$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v)^* (\lambda w. w)) \text{True})$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v)^* (\lambda w. w)) \text{True})$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda v. v) \text{True})^*$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v)^* (\lambda w. w)) \text{True})$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda v. v)^* \text{True})$$

Beispiel

$$(((\lambda x. \lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow (x \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\lambda u, v. v)) (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda y. \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}))^* (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil}))$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \left(\begin{array}{l} \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } (\lambda w. w) \text{ Nil})^* \text{ of } \{ \\ \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow ((\lambda u, v. v) \text{ } z) \} \end{array} \right) \text{True}$$

$$\xrightarrow{no, case} (((\lambda u, v. v)^* (\lambda w. w)) \text{True})$$

$$\xrightarrow{no, \beta} ((\lambda v. v)^* \text{True})$$

$$\xrightarrow{no, \beta} \text{True}$$

Normalordnungsreduktion (2)

Definition

Wenn s unmittelbar zu t reduziert, dann ist $R[s] \rightarrow R[t]$ für jeden Reduktionskontext R eine **Normalordnungsreduktion**.

- Notation: $\xrightarrow{no}$, bzw. auch $\xrightarrow{no,\beta}$ und $\xrightarrow{no,case}$.
- $\xrightarrow{no,+}$ transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
- $\xrightarrow{no,*}$ reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$

Normalformen

Ein KFPT-Ausdruck s ist eine

- **Normalform** (NF = normal form):
 s enthält keine (β) - oder (case)-Redexe
- **Kopfnormalform** (HNF = head normal form):
 s ist Konstruktoranwendung oder Abstraktion $\lambda x_1, \dots, x_n. s'$, wobei s' entweder Variable oder $(c\ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)})$ oder $(x\ s'')$ ist
- **schwache Kopfnormalform** (WHNF = weak head normal form):
 s ist eine FWHNF oder eine CWHNF.
- **funktionale schwache Kopfnormalform** (FWHNF = functional whnf):
 s ist eine Abstraktion
- **Konstruktor-schwache Kopfnormalform** (CWHNF = constructor whnf):
 s ist eine Konstruktoranwendung $(c\ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)})$

Wir verwenden nur WHNFs in KFPT (keine NFs, keine HNFs).

Beispiel

$(\lambda x. ((\lambda y. y) (\lambda z. z)))$ FWHNF

$(\text{Cons True } ((\lambda y. y) \text{Nil}))$ CWHNF

Warum **schwach**?

Normalformen

Warum **schwach**?

Schwach: damit es zur Reduktionsstrategie passt:
Strategie ist: Normalordnungsreduktion
D.h. **nicht alles in einer WHNF ist ausgewertet**.
Weil es unausgewertete Unterausdrücke gibt: schwach

Normalformen

Warum **schwach**?

Schwach: damit es zur Reduktionsstrategie passt:

Strategie ist: Normalordnungsreduktion

D.h. **nicht alles in einer WHNF ist ausgewertet**.

Weil es unausgewertete Unterausdrücke gibt: schwach

NF und HNF passen jeweils zu anderen Reduktions-Strategien.

Terminierung bzw. Konvergenz

Definition

Ein KFPT-Ausdruck s **konvergiert** (oder *terminiert*, notiert als $s\Downarrow$) genau dann, wenn:

$$s\Downarrow \iff \exists \text{ WHNF } t : s \xrightarrow{no,*} t$$

Falls s nicht konvergiert, so sagen wir s **divergiert** und notieren dies mit $s\Uparrow$.

Sprechweisen:

Wir sagen s **hat eine WHNF** (bzw. FWHNF, CWHNF), wenn s zu einer WHNF (bzw. FWHNF, CWHNF) mit $\xrightarrow{no,*}$ reduziert werden kann.

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man Daten und Funktionen **unterscheiden** will.
bzw. wenn man die erlaubten Argumente **beschränken** will.
Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
 - ... und dann geht es weiter ...
 - - verschiedene Art von Daten
 - - verschiedene Funktionalitäten...

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man Daten und Funktionen **unterscheiden** will.
bzw. wenn man die erlaubten Argumente **beschränken** will.
Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- ... und dann geht es weiter ...
 - - verschiedene Art von Daten
 - - verschiedene Funktionalitäten...

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man Daten und Funktionen **unterscheiden** will.
bzw. wenn man die erlaubten Argumente **beschränken** will.
Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- ... und dann geht es weiter ...
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten...

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man Daten und Funktionen **unterscheiden** will.
bzw. wenn man die erlaubten Argumente **beschränken** will.
Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- ... und dann geht es weiter ...
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten...

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF: Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
(Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein **dynamischer Typfehler** tritt auf.

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF: Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
(Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein **dynamischer Typfehler** tritt auf.

Definition (Dynamische Typregeln für KFPT)

Ein KFPT-Ausdruck s **direkt dynamisch ungetypt**, falls:

- $s = R[\text{case}_T (c \ s_1 \ \dots \ s_n) \text{ of } Alts]$ und c ist *nicht* vom Typ T
- $s = R[\text{case}_T \lambda x.t \text{ of } Alts]$.
- $s = R[(c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) \ t]$

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF: Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
(Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein **dynamischer Typfehler** tritt auf.

Definition (Dynamische Typregeln für KFPT)

Ein KFPT-Ausdruck s **direkt dynamisch ungetypt**, falls:

- $s = R[\text{case}_T (c \ s_1 \ \dots \ s_n) \text{ of } Alts]$ und c ist *nicht* vom Typ T
- $s = R[\text{case}_T \lambda x.t \text{ of } Alts]$.
- $s = R[(c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) \ t]$

s ist **dynamisch ungetypt**



$\exists t : s \xrightarrow{no,*} t \wedge t \text{ ist direkt dynamisch ungetypt}$

Beispiele

- `caseList True of {Nil → Nil; (Cons x xs) → xs}`
ist direkt dynamisch ungetypt
- `(λ $x$ .caseList  $x$  of {Nil → Nil; (Cons x xs) → xs}) True`
ist dynamisch ungetypt
- `(Cons True Nil) (λ $x$ . $x$ )` ist direkt dynamisch ungetypt
- `(caseBool  $x$  of {True → True; False → False})`
ist typ-richtig?
- `(λ $x$ .caseBool  $x$  of {True → True; False → False}) (λ $y$ . $y$ )`
ist dynamisch ungetypt

Dynamische Typisierung (2)

Satz (Progress Lemma)

Ein **geschlossener** KFPT-Ausdruck s ist irreduzibel (bzgl. der Normalordnung) genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen auf ihn zutrifft:

- Entweder ist s eine WHNF, oder
- s ist direkt dynamisch ungetypt.

Fortschrittseigenschaft

(Progress property):

Wenn t geschlossen, keine WHNF und getypt ist, dann kann man eine Normalordnungsreduktion auf t durchführen.

Es fehlt noch: Zusammenhang zwischen Typisierung und mehreren Normalordnungs-Reduktionen !?

Beispiele

Was ist mit $1/0$ in Haskell?

$1/0$ ist in Haskell als externer Aufruf definiert.

Intern würde man es so machen:

case-Ausdruck mit Ω als Ausgang.

(Wobei Ω ein Ausdruck ist, der alle Typen hat.)

Dann ist $1/0$ getypt, und Reduktion ergibt Nichtterminierung.

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

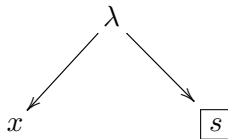
Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt
- Abstraktionen $\lambda x.s$

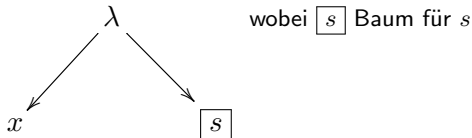


wobei s Baum für s

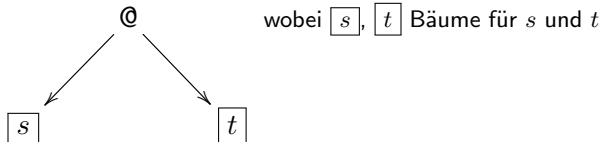
Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt
- Abstraktionen $\lambda x.s$



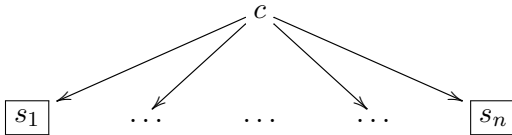
- Applikationen $(s\ t)$



Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

- Konstruktoranwendungen n -stellig: $(c\ s_1 \dots s_n)$

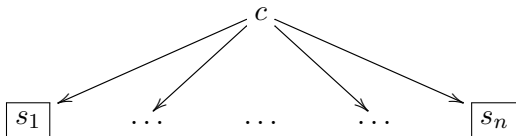
wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i



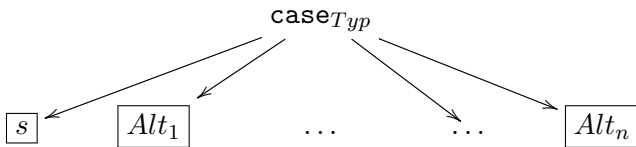
Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

- Konstruktoranwendungen n -stellig: $(c\ s_1 \dots s_n)$

wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i



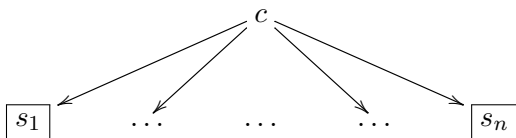
- case-Ausdrücke: $n + 1$ Kinder, $\text{case}_{Typ}\ s\ \text{of}\ \{Alt_1; \dots; Alt_n\}$



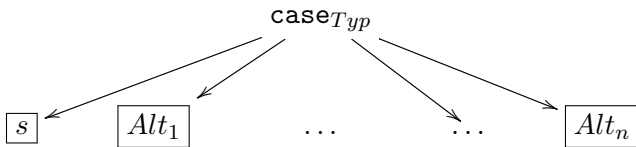
Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

- Konstruktoranwendungen n -stellig: $(c \ s_1 \ \dots \ s_n)$

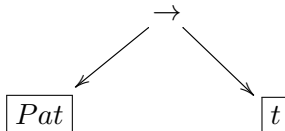
wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i



- case-Ausdrücke: $n + 1$ Kinder, $\text{case}_{Typ} \ s \ \text{of} \ \{Alt_1; \dots; Alt_n\}$



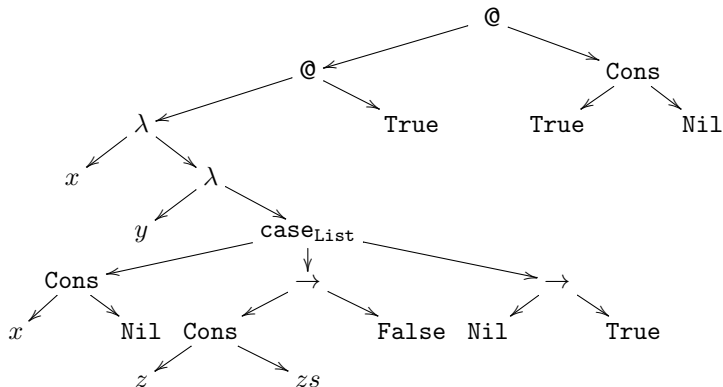
- case-Alternative $Pat \rightarrow t$



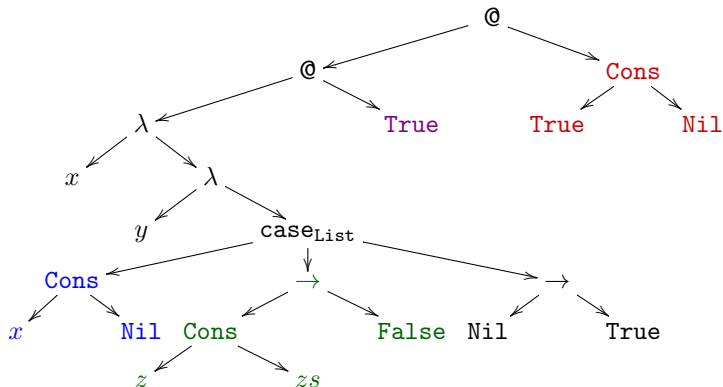
Beispiel

$$\left(\left(\begin{array}{l} \lambda x. \lambda y. \text{case}_{\text{List}} (\text{Cons } x \text{ Nil}) \text{ of } \{ \\ \quad (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow \text{False}; \\ \quad \text{Nil} \rightarrow \text{True} \} \end{array} \right) \text{True} \right) (\text{Cons True Nil})$$

Beispiel

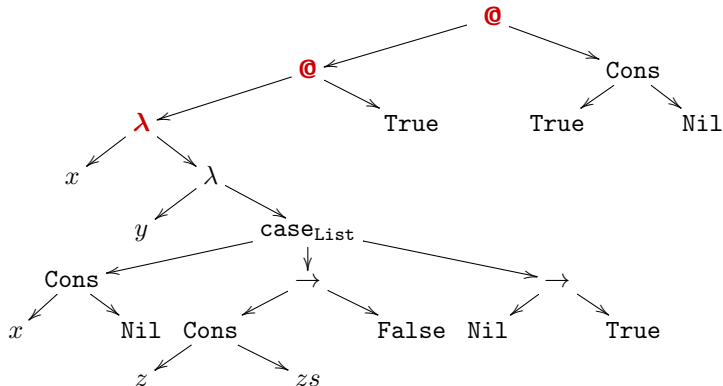
$$\left(\left(\lambda x. \lambda y. \text{caseList } (\text{Cons } x \text{ Nil}) \text{ of } \{ \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow \text{False}; \\ \text{Nil} \rightarrow \text{True} \end{array} \right\} \right) \text{True} \right) (\text{Cons True Nil})$$


Beispiel

$$\left(\left(\lambda x. \lambda y. \text{caseList } (\text{Cons } x \text{ Nil}) \text{ of } \{ \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow \text{False}; \\ \text{Nil} \rightarrow \text{True} \end{array} \right\} \right) \text{True} \right) (\text{Cons True Nil})$$


Beispiel

$$\left(\left(\lambda x. \lambda y. \text{caseList } (\text{Cons } x \text{ Nil}) \text{ of } \{ \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} (\text{Cons } z \text{ } zs) \rightarrow \text{False}; \\ \text{Nil} \rightarrow \text{True} \end{array} \right\} \right) \text{True} \right) (\text{Cons True Nil})$$



NO-Redex-Suche: immer links, bis Abstraktion oder Konstruktoranwendung

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften

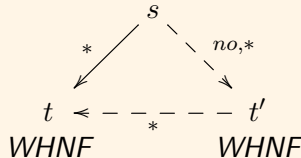
- Die Normalordnungsreduktion ist **deterministisch**, d.h. für jedes s gibt es höchstens ein t mit $s \xrightarrow{no} t$.
- Eine WHNF ist irreduzibel bezüglich der Normalordnungsreduktion.

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften

- Die Normalordnungsreduktion ist **deterministisch**, d.h. für jedes s gibt es höchstens ein t mit $s \xrightarrow{no} t$.
- Eine WHNF ist irreduzibel bezüglich der Normalordnungsreduktion.

Satz (Standardisierung für KFPT)

Wenn $s \xrightarrow{*} t$ mit beliebigen (β)- und (*case*)-Reduktionen (in beliebigem Kontext angewendet), und t ist eine WHNF, dann existiert eine WHNF t' , so dass $s \xrightarrow{no,*} t'$ und $t' \xrightarrow{*} t$ (unter α -Gleichheit).



KFPT Erweiterung zu KFPTS

KFPTS

Rekursive Superkombinatoren: KFPTS

- **Erweiterung:** KFPT zu KFPTS
- „S“ steht für **Superkombinatoren**
- Superkombinatoren sind Namen (Konstanten) für Funktionen
- Superkombinatoren dürfen auch **rekursiv** definiert sein

Annahme: Es gibt eine Menge von Superkombinator**namen** $\mathcal{SK}$.

Beispiele: Superkombinator `length`, `map`, `sum`,

KFPTS: Syntax

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Expr} ::= & V \mid \lambda V. \mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}_1 \mathbf{Expr}_2) \\
 & \mid (c_i \mathbf{Expr}_1 \dots \mathbf{Expr}_{\text{ar}(c_i)}) \\
 & \mid (\text{case}_{\text{Typ}} \mathbf{Expr} \text{ of } \{\mathbf{Pat}_1 \rightarrow \mathbf{Expr}_1; \dots; \mathbf{Pat}_n \rightarrow \mathbf{Expr}_n\}) \\
 & \mid \textcolor{red}{SK} \text{ wobei } SK \in \mathcal{SK}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{Pat}_i ::= (c_i V_1 \dots V_{\text{ar}(c_i)})$ wobei die Variablen V_i alle verschieden sind.

KFPTS:Syntax (2)

Zu jedem Superkombinator SK

gibt es eine Superkombinatordefinition:

$$SK \ V_1 \ \dots \ V_n = \mathbf{Expr}$$

- V_i paarweise verschiedene Variablen;
- $\mathbf{Expr}$ ein KFPTS-Ausdruck;
- $FV(\mathbf{Expr}) \subseteq \{V_1, \dots, V_n\}$;
- $\text{ar}(SK) = n \geq 0$: Stelligkeit des Superkombinators

Beispiel: Superkombinator `length`

```
length xs = caseList xs of {
    Nil → 0;
    (Cons y ys) → (1 + length ys)}
```

KFPTS: Syntax (3)

Ein **KFPTS-Programm** besteht aus:

- einer Menge von Typen und Konstruktoren,
- einer Menge von Superkombinator-Definitionen,
- und aus einem KFPTS-Ausdruck s .
(Diesen könnte man auch als Superkombinator `main` mit Definition `main = s` definieren.)

Das Programm darf keine freien Variablennamen enthalten:

D.h. alle in s verwendeten Superkombinatoren müssen definiert sein.

KFPTS:Syntax (2) Superkombinatoren

Unterschiede Haskell / KFPTS bei Superkombinatordefinitionen:

- Mehrere Definitionen (für verschiedene Fälle) pro Superkombinator.
- Argumente können Pattern sein
- Guards sind möglich

KFPTS:Syntax (2) Superkombinatoren

Unterschiede Haskell / KFPTS bei Superkombinatordefinitionen:

- Mehrere Definitionen (für verschiedene Fälle) pro Superkombinator.
- Argumente können Pattern sein
- Guards sind möglich

Ist übersetzbar nach KFPTS.

Superkombinatoren

Der Begriff **Superkombinator** im Lambda Kalkül

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \dots, x_n. s'$
- Man kann s durch iterierte Abkürzungen (ohne rekursive Vorkommen) und komplett ohne innere lambda-s darstellen

Beispiele

$\lambda x, y. x$

$\lambda x. (x ((\lambda y. y) x))$

$\lambda x. (x \lambda y. (y x))$

transformierbar zu: $\lambda x. (x ((\lambda z. \lambda y. (y z)) x))$

mittels (interner) Reduktion (rückwärts)

Superkombinatoren

Der Begriff **Superkombinator** im Lambda Kalkül

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \dots, x_n. s'$
- Man kann s durch iterierte Abkürzungen (ohne rekursive Vorkommen) und komplett ohne innere lambda-s darstellen

Beispiele

$\lambda x, y. x$

$\lambda x. (x ((\lambda y. y) x))$

$\lambda x. (x \lambda y. (y x))$

transformierbar zu: $\lambda x. (x ((\lambda z. \lambda y. (y z)) x))$

mittels (interner) Reduktion (rückwärts)

$= \lambda x. (x (I x))$ mit I

Superkombinatoren

Der Begriff **Superkombinator** im Lambda Kalkül

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \dots, x_n. s'$
- Man kann s durch iterierte Abkürzungen (ohne rekursive Vorkommen) und komplett ohne innere lambda-s darstellen

Beispiele

$\lambda x, y. x$

$\lambda x. (x ((\lambda y. y) x))$

$\lambda x. (x \lambda y. (y x))$

transformierbar zu: $\lambda x. (x ((\lambda z. \lambda y. (y z)) x))$

mittels (interner) Reduktion (rückwärts)

$= \lambda x. (x (I x))$ mit I
 kein Superkombinator

Superkombinatoren, Einschub eta-Transformation

Die eta (η)- Transformation im Lambda-Kalkül ist:

$$s \sim_{\eta} \lambda x. s \ x \quad \text{wenn } x \text{ nicht frei in } s$$

Diese ist in manchen Programmiersprachen korrekt

Vorsicht: Aber i.a. ist diese falsch in Haskell:

- $\perp$ ist keine WHNF, aber $\lambda x. \perp \ x$ ist eine WHNF.
- Fazit: η kann die Terminierung von Ausdrücken ändern!!
- $\implies$ wird im Haskell-Compiler nicht verwendet.

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr}) \mid \text{case}_{Typ} \mathbf{R} \text{ of } Alts$$

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr}) \mid \text{case}_{Typ} \mathbf{R} \text{ of } Alts$$

Reduktionsregeln (β) , (case) und (SK- β):

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

$$(\text{case}) \quad \text{case}_{Typ} (c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) \text{ of } \{ \dots; (c \ x_1 \ \dots \ x_{\text{ar}(c)}) \rightarrow t; \dots \} \\ \rightarrow t[s_1/x_1, \dots, s_{\text{ar}(c)}/x_{\text{ar}(c)}]$$

$$(\text{SK-}\beta) \quad (\text{SK} \ s_1 \ \dots \ s_n) \rightarrow e[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n], \\ \text{wenn } \text{SK} \ x_1 \ \dots \ x_n = e \text{ die Definition von } \text{SK} \text{ ist}$$

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr}) \mid \text{case}_{Typ} \mathbf{R} \text{ of } Alts$$

Reduktionsregeln (β) , (case) und (SK- β):

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

$$(\text{case}) \quad \text{case}_{Typ} (c \ s_1 \ \dots \ s_{\text{ar}(c)}) \text{ of } \{ \dots; (c \ x_1 \ \dots \ x_{\text{ar}(c)}) \rightarrow t; \dots \} \\ \rightarrow t[s_1/x_1, \dots, s_{\text{ar}(c)}/x_{\text{ar}(c)}]$$

$$(\text{SK-}\beta) \quad (\text{SK} \ s_1 \ \dots \ s_n) \rightarrow e[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n], \\ \text{wenn } \text{SK} \ x_1 \ \dots \ x_n = e \text{ die Definition von SK ist}$$

Normalordnungsreduktion:

$$\frac{s \rightarrow t \quad \text{mit } (\beta)\text{-, (case)\text{- oder (SK-}\beta\text{)}}}{R[s] \xrightarrow{no} R[t]}$$

KFPTS: WHNFs und Dynamische Typisierung

WHNFs

- WHNF = CWHNF oder FWHNF
- CWHNF = Konstruktoranwendung $(c\ s_1\ \dots\ s_{\text{ar}(c)})$
- FWHNF = Abstraktion **oder** $SK\ s_1\ \dots\ s_m$ mit $\text{ar}(SK) > m$

Direkt dynamisch ungetypt:

- Regeln wie vorher: $R[(\text{case}_T\ \lambda x.s\ \text{of}\ \dots)]$,
 $R[(\text{case}_T\ (c\ s_1\ \dots\ s_n)\text{of}\ \dots)]$, wenn c nicht von Typ T und
 $R[((c\ s_1\ \dots\ s_{\text{ar}(c)})\ t)]$
- Neue Regel: $R[\text{case}_T\ (SK\ s_1\ \dots\ s_m)\ \text{of}\ \text{Alts}]$ ist direkt dynamisch ungetypt falls $\text{ar}(SK) > m$.

Markierungsalgorithmus

Markierung funktioniert genauso wie in KFPTS:

- $(s\ t)^{\star} \Rightarrow (s^{\star}\ t)$
- $(\text{case}_{Typ}\ s\ \text{of}\ Alts)^{\star} \Rightarrow (\text{case}_{Typ}\ s^{\star}\ \text{of}\ Alts)$

Neue Fälle:

- Ein Superkombinator ist mit $\star$ markiert:
 - Genügend Argumente vorhanden: Reduziere mit $(SK-\beta)$
 - Zu wenig Argumente und kein Kontext außen: WHNF
 - Zu wenig Argumente und im Kontext ($\text{case}\ [.] \dots$): direkt dynamisch ungetypt.

Beispiel

Die Superkombinatoren *map* und *not*:

$$\begin{aligned} \text{map } f \text{ } xs &= \text{case}_{\text{List}} \text{ } xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\ &\quad (\text{Cons } y \text{ } ys) \rightarrow \text{Cons } (f \text{ } y) (\text{map } f \text{ } ys)\} \\ \text{not } x &= \text{case}_{\text{Bool}} \text{ } x \text{ of } \{\text{True} \rightarrow \text{False}; \text{False} \rightarrow \text{True}\} \end{aligned}$$

Beispiel

Die Superkombinatoren *map* und *not*:

$$\begin{aligned}
 \text{map } f \text{ } xs &= \text{case}_{\text{List}} \text{ } xs \text{ of } \{\text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\
 &\quad (\text{Cons } y \text{ } ys) \rightarrow \text{Cons } (f \text{ } y) (\text{map } f \text{ } ys)\} \\
 \text{not } x &= \text{case}_{\text{Bool}} \text{ } x \text{ of } \{\text{True} \rightarrow \text{False}; \text{False} \rightarrow \text{True}\}
 \end{aligned}$$

Beispiel zur Auswertung:

$$\begin{aligned}
 &\text{map not (Cons True (Cons False Nil))} \\
 \xrightarrow{\text{no,SK-}\beta} &\text{case}_{\text{List}} (\text{Cons True (Cons False Nil)}) \text{ of } \{ \\
 &\quad \text{Nil} \rightarrow \text{Nil}; \\
 &\quad (\text{Cons } y \text{ } ys) \rightarrow \text{Cons } (\text{not } y) (\text{map not } ys)\} \\
 \xrightarrow{\text{no,case}} &\text{Cons } (\text{not True}) (\text{map not (Cons False Nil)})
 \end{aligned}$$

WHNF erreicht!

Beachte: Im GHCi-Interpreter wird nur aufgrund des Anzeigens in den Argumenten eines Konstruktors weiter ausgewertet

Erweiterung um seq und strict

- In Haskell gibt es seq:

$$(\text{seq } a \ b) = \begin{cases} b & \text{falls } a \Downarrow \\ \perp & \text{falls } a \Uparrow \end{cases}$$

- Operational: Werte erst a aus, dann b ; und gebe (nur) den Wert von b zurück
- Analog: strict (in Haskell infix als $\$!$ geschrieben)
- `strict f` macht f **strikt** im ersten Argument, d.h. `strict f` wertet erst das Argument aus, dann erfolgt die Definitionseinsetzung.
- `seq` und `strict` sind austauschbar:

$$\begin{aligned} f \ \$! \ x &= \text{seq } x \ (f \ x) \\ \text{seq } a \ b &= (\backslash x \rightarrow b) \ \$! \ a \end{aligned}$$

Erweiterung um seq und strict

- In Haskell gibt es seq:

$$(\text{seq } a \ b) = \begin{cases} b & \text{falls } a \Downarrow \\ \perp & \text{falls } a \Uparrow \end{cases}$$

- Operational: Werte erst a aus, dann b ; und gebe (nur) den Wert von b zurück
- Analog: strict (in Haskell infix als $\$!$ geschrieben)
- `strict f` macht f **strikt** im ersten Argument, d.h. `strict f` wertet erst das Argument aus, dann erfolgt die Definitionseinsetzung.
- `seq` und `strict` sind austauschbar:

$$\begin{aligned} f \ \$! \ x &= \text{seq } x \ (f \ x) \\ \text{seq } a \ b &= (\backslash x \rightarrow b) \ \$! \ a \end{aligned}$$

Nachweisbar: seq ist in KFPT, KFPTS nicht kodierbar!

Wir bezeichnen mit

- KFPT+seq die Erweiterung von KFPT um seq
- KFPTS+seq die Erweiterung von KFPTS um seq

Wir verzichten auf die formale Definition!

Man benötigt u.a. die Reduktionsregel:

$$\text{seq } v \ t \rightarrow t, \text{ wenn } v \text{ WHNF}$$

erweiterte Reduktionskontexte und die neue Verschieberegel:

$$(\text{seq } s \ t)^* \rightarrow (\text{seq } s^* \ t)$$

Bemerkung: Die (low-level) Sprache KFP

KFP hat keine Typbeschränkungen!

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Expr} ::= & V \mid \lambda V. \mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}_1 \mathbf{Expr}_2) \\
 & \mid (c_i \mathbf{Expr}_1 \dots \mathbf{Expr}_{\text{ar}(c_i)}) \\
 & \mid (\text{case } \mathbf{Expr} \text{ of} \\
 & \quad \{\mathbf{Pat}_1 \rightarrow \mathbf{Expr}_1; \dots; \mathbf{Pat}_n \rightarrow \mathbf{Expr}_n; \text{lambda} \rightarrow \mathbf{Expr}_{n+1}\}) \\
 & \text{wobei } Pat_1, \dots, Pat_n \text{ alle Konstruktoren abdecken}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Pat}_i ::= (c_i V_1 \dots V_{\text{ar}(c_i)}) \text{ wobei die Variablen } V_i \text{ alle verschieden sind.}$$

- Unterschied zu KFPT: Kein getyptes case, lambda-Pattern
- Neue Reduktionsregel case $\lambda x.s$ of $\{\dots, \text{lambda} \rightarrow t\} \rightarrow t$
- In KFP ist seq kodierbar:

$$\text{seq } a \ b := \text{case } a \text{ of } \{Pat_1 \rightarrow b; \dots; Pat_n \rightarrow b; \text{lambda} \rightarrow b\}$$

Polymorphe Typen

Mit KFPTSP bezeichnen wir **polymorph getyptes** KFPTS

Definition

Die **Syntax von polymorphen Typen** kann durch die folgende Grammatik beschrieben werden:

$$\mathbf{T} ::= TV \mid TC \mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_n \mid \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$$

wobei TV für eine Typvariable steht und TC ein Typkonstruktor mit Stelligkeit n ist.

Nur Ausdrücke, die einen (polymorphen) Typ besitzen, gehören zu KFPTSP.

KFPTSP Beispiele

- **polymorph**: Typen haben Typvariablen
- z.B. `fak :: Int → Int`
- z.B. `map :: (a → b) → (List a) → (List b)`
- Haskell: `->` statt `→`
- Haskell verwendet `[a]` statt `(List a)`.

Beispiele

```
True    :: Bool
False   :: Bool
not      :: Bool → Bool
map      :: (a → b) → [a] → [b]
(λx.x)   :: (a → a)
```

Einige Typregeln

- Für die Anwendung:

$$\frac{s :: T_1 \rightarrow T_2, t :: T_1}{(s \ t) :: T_2}$$

- Instanziierung

$\frac{s :: T}{s :: T'}$ wenn $T' = \sigma(T)$, wobei σ eine Typsubstitution ist,
 $s :: T'$ die Typen für Typvariablen ersetzt.

- Für case-Ausdrücke:

$$\frac{s :: T_1, \quad \forall i : Pat_i :: T_1, \quad \forall i : t_i :: T_2}{(\text{case}_T s \text{ of } \{Pat_1 \rightarrow t_1; \dots; Pat_n \rightarrow t_n\}) :: T_2}$$

Beispiel

$\text{and} \quad := \lambda x, y. \text{case}_{\text{Bool}} x \text{ of } \{\text{True} \rightarrow y; \text{False} \rightarrow \text{False}\}$
 $\text{or} \quad := \lambda x, y. \text{case}_{\text{Bool}} x \text{ of } \{\text{True} \rightarrow \text{True}; \text{False} \rightarrow y\}$

Beide haben Typ: $\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

Mit der Anwendungsregel kann man Typen von Ausdrücken berechnen:

$$\frac{\text{and} :: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}, \text{True} :: \text{Bool}}{(\text{and True}) :: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}, \text{False} :: \text{Bool}$$

$$(\text{and True False}) :: \text{Bool}$$

Beispiel

$$\begin{array}{c}
 \text{Cons} :: a \rightarrow [a] \rightarrow [a] \\
 \hline
 \text{Cons} :: \text{Bool} \rightarrow [\text{Bool}] \rightarrow [\text{Bool}], \text{True} :: \text{Bool} \\
 \hline
 \text{True} :: \text{Bool}, \quad \text{(Cons True)} :: [\text{Bool}] \rightarrow [\text{Bool}] \quad , \quad \text{Nil} :: [a] \\
 \text{False} :: \text{Bool}, \quad \hline
 \text{(Cons True Nil)} :: [\text{Bool}] \quad , \quad \text{Nil} :: [\text{Bool}] \\
 \hline
 \text{case}_{\text{Bool}} \text{ True of } \{ \text{True} \rightarrow (\text{Cons True Nil}); \text{False} \rightarrow \text{Nil} \} :: [\text{Bool}]
 \end{array}$$

Beispiel

$$\frac{\text{map} :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b] \quad \text{not} :: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{\text{map} :: (\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow [\text{Bool}] \rightarrow [\text{Bool}]}, \text{not} :: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$$

$$(\text{map not}) :: [\text{Bool}] \rightarrow [\text{Bool}]$$

Kernsprache	Besonderheiten
KFP	Erweiterung des call-by-name Lambda-Kalküls um ungetyptes case und Datenkonstruktoren, spezielles case-Pattern <code>lambda</code> ermöglicht Kodierung von <code>seq</code> .
KFPT	Erweiterung des call-by-name Lambda-Kalküls um (schwach) getyptes case und Datenkonstruktoren, <code>seq</code> ist nicht kodierbar.
KFPTS	Erweiterung von KFPT um rekursive Superkombinatoren, <code>seq</code> nicht kodierbar.
KFPTSP	KFPTS, polymorph getypt; <code>seq</code> nicht kodierbar.
KFPT+seq	Erweiterung von KFPT um den <code>seq</code> -Operator
KFPTS+seq	Erweiterung von KFPTS um den <code>seq</code> -Operator
KFPTSP+seq	KFPTS+seq mit polymorpher Typisierung, sehr geeignete Kernsprache für Haskell

Ausblick

- Erörterung der meisten Konstrukte von Haskell
- insbesondere auch: Modulsystem, Typklassen
- Informell: KFPTSP+seq ist die passende Kernsprache
- Genaue Erklärungen und Analysen zu Typisierung und zur Typberechnung kommen noch!
- Exkurs demnächst: Probabilistische funktionale Programmierung