

Einführung in die Funktionale Programmierung:

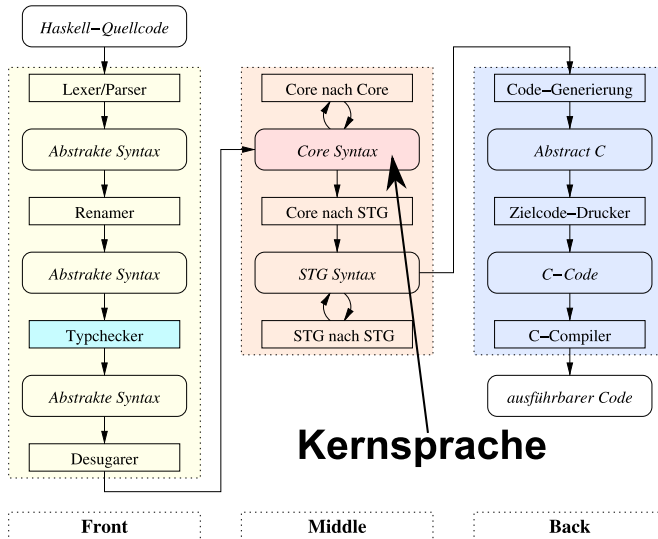
**Funktionale Kernsprachen:
Einleitung & Der Lambda-Kalkül**

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

WS 2023/24

- 1 Einleitung
- 2 Normal-Order-Reduktion
- 3 CBV
- 4 Haskell
- 5 Programmieren mit `let` in Haskell
- 6 Gleichheit

Compilerphasen des GHC (schematisch)



Einleitung

- Wir betrachten zunächst den **Lambda-Kalkül**
- Er ist „Kernsprache“ fast aller (funktionalen) Programmiersprachen
- Allerdings oft zu minimalistisch,
später: **Erweiterte Lambda-Kalküle**
- Kalkül: **Syntax** und **Semantik**
- Sprechweise: **der** Kalkül (da mathematisch)

Kalküle

Syntax

- Legt fest, welche Programme (Ausdrücke) gebildet werden dürfen
- Welche **Konstrukte** stellt der Kalkül zu Verfügung?

Semantik

- Legt die **Bedeutung** der Programme fest
- Gebiet der **formalen Semantik** kennt verschiedene Ansätze
→ kurzer Überblick auf den nächsten Folien

Ansätze zur Semantik

Axiomatische Semantik

- Beschreibung von Eigenschaften von Programmen mithilfe **logischer Axiome** und **Schlussregeln**
- **Herleitung** neuer Eigenschaften mit den Schlussregeln

- Prominentes Beispiel: Hoare-Logik, z.B.

Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$:

Vorbedingung P , Programm S , Nachbedingung Q

Schlussregel z.B.:

$$\text{Sequenz: } \frac{\{P\}S\{Q\}, \{Q\}T\{R\}}{\{P\}S;T\{R\}}$$

- Erfasst i.a. nur einige Eigenschaften, nicht alle, von Programmen

Ansätze zur Semantik (2)

Denotationale Semantik

- **Abbildung** von Programmen in mathematische (Funktionen-)Räume durch **Semantische Funktion**
- Oft Verwendung von partiell geordneten Mengen (Domains)
- Z.B. $\llbracket \cdot \rrbracket$ als semantische Funktion:

$$\llbracket \text{if } a \text{ then } b \text{ else } c \rrbracket = \begin{cases} \llbracket b \rrbracket, & \text{falls } \llbracket a \rrbracket = \text{True} \\ \llbracket c \rrbracket, & \text{falls } \llbracket a \rrbracket = \text{False} \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist eher **mathematisch**
- Schwierigkeit steigt mit dem Umfang der Syntax
- Nicht immer unmittelbar anwendbar (z.B. Nebenläufigkeit)

Ansätze zur Semantik (3)

Operationale Semantik

- definiert genau die **Auswertung**/**Ausführung** von Programmen
- definiert einen Interpreter
- Verschiedene Formalismen:
 - Zustandsübergangssysteme
 - Abstrakte Maschinen
 - Ersetzungssysteme
- Unterscheidung in **small-step** und **big-step** Semantiken
- Wir werden bevorzugt operationale (small-step) Semantiken verwenden

Der Lambda-Kalkül als Semantik

Lambda-Kalkül als Semantik auch für imperative Programmiersprachen

- Lambda-Kalkül wird oft als semantischer Bereich für andere Programmiersprachen genutzt:

Abbildung von Programmen/Ausdrücken in den Lambda-Kalkül.

- Grund ist, dass es eindeutig ist und sehr genau bekannt ist, wie man mit Namen, Funktionen, Funktionsanwendungen im Lambda-Kalkül umgeht.

- Von **Alonzo Church** und **Stephen Kleene** in den 1930er Jahren eingeführt
- **Idee und Ziel:** Darstellungen der Berechnung von Funktionen

$x \mapsto f(x)$ x ist Eingabe; $f(x)$ Ausgabe

Mechanisches Rechenverfahren mit Funktionen
(Alternative zu Turing-Maschine)

- **Beispiele**
- Der Lambda-Kalkül ist **minimal**: es geht NUR um Funktionen.
Man definiert Funktionen;
die Argumente sind ebenfalls Funktionen.

Der Lambda-Kalkül

- Wir betrachten den **ungetypten** Lambda-Kalkül.
- Wir geben die (eine) **Auswertung als operationale Semantik** an.
Church, Kleene und auch andere Artikel / Bücher gehen meist axiomatisch vor (mit Gleichheitsaxiomen)
- Der ungetypte Lambda-Kalkül ist **Turing**-mächtig.
- Viele Ausdrücke des Lambda-Kalküls können in **Haskell** eingegeben werden, aber nur wenn sie Haskell-**typisierbar** sind.
- Haskell-Programm zur Auswertung von beliebigen Lambda-Ausdrücken: LExp.hs (siehe Webseite)

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$$(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$$

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$$(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$$
$$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2} \longrightarrow \text{o1}$$

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$$(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$$
$$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2} \longrightarrow \text{o1}$$
$$(\lambda x y.y) \text{ o1 o2} \longrightarrow \text{o2}$$

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$$(\lambda x.x) \text{ object} \longrightarrow \text{object}$$
$$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2} \longrightarrow \text{o1}$$
$$(\lambda x y.y) \text{ o1 o2} \longrightarrow \text{o2}$$
$$(\lambda x y z.y) \text{ o1 o2 o3} \longrightarrow \text{o2}$$

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$$\begin{array}{ll}
 (\lambda x.x) \text{ object} & \longrightarrow \text{object} \\
 (\lambda x y.x) \text{ o1 o2} & \longrightarrow \text{o1} \\
 (\lambda x y.y) \text{ o1 o2} & \longrightarrow \text{o2} \\
 (\lambda x y z.y) \text{ o1 o2 o3} & \longrightarrow \text{o2} \\
 (\lambda f g x.f (g x)) F G a & \longrightarrow F (G a)
 \end{array}$$

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$(\lambda x.x) \text{ object}$	$\longrightarrow$	object	Identität
$(\lambda x y.x) \text{ o1 o2}$	$\longrightarrow$	o1	Projektion links
$(\lambda x y.y) \text{ o1 o2}$	$\longrightarrow$	o2	Projektion rechts
$(\lambda x y z.y) \text{ o1 o2 o3}$	$\longrightarrow$	o2	Projektion
$(\lambda f g x.f (g x)) F G a$	$\longrightarrow$	$F (G a)$	Komposition von Funktionen

Syntax des Lambda-Kalküls

Expr ::= V	Variable (unendliche Menge)
$\lambda V.$ Expr	Abstraktion
(Expr Expr)	Anwendung (Applikation)

- Abstraktionen sind **anonyme Funktionen**

Z. B. $id(x) = x$ in Lambda-Notation: $\lambda x.x$

- Haskell: $\backslash x \rightarrow s$ statt $\lambda x.s$
- $(s\ t)$ erlaubt die Anwendung von Funktionen auf Argumente
 s, t beliebige Ausdrücke $\implies$ Lambda Kalkül ist **higher-order**

Z. B. $(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)$ (entspricht gerade $id(id)$)

Syntax des Lambda-Kalküls (2)

Assoziativitäten, Prioritäten und Abkürzungen

- Klammerregeln: $s \ r \ t$ entspricht $(s \ r) \ t$
- Priorität: Rumpf einer Abstraktion so groß wie möglich:
 $\lambda x.x \ y$ ist $\lambda x.(x \ y)$ und **nicht** $((\lambda x.x) \ y)$
- $\lambda x, y, z.s$ entspricht $\lambda x.\lambda y.\lambda z.s$ entspricht $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.s))$

Bekannte Lambda-Ausdrücke

Oft vorkommende Ausdrücke (Kombinatoren)

$I := \lambda x.x$ Identität

$K := \lambda x.\lambda y.x$ Projektion auf Argument 1

$K2 := \lambda x.\lambda y.y$ Projektion auf Argument 2

$\Omega := (\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(x\ x))$ terminiert nicht

$Y := \lambda f.(\lambda x.(f\ (x\ x)))\ (\lambda x.(f\ (x\ x)))$ Fixpunkt Kombinator

$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ z)\ (y\ z)$ S- Kombinator zum SKI-calculus

$Y' := \lambda f.(\lambda x.(\lambda y.(f\ (x\ x\ y))))\ (\lambda x.(\lambda y.(f\ (x\ x\ y))))$
 Fixpunkt Kombinator Variante für call-by-value

Beispiel zur Lambda-Notation

Beispiel: algebraische Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

Lambda-Kalkül mit Integers $\mathbb{Z}$ und einfacher Arithmetik

Operator F : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

Beispiel zur Lambda-Notation

Beispiel: algebraische Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

Lambda-Kalkül mit Integers $\mathbb{Z}$ und einfacher Arithmetik

Operator F : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

$F(f) := f'$, so dass $f'(x) = f(x) - 2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

Beispiel zur Lambda-Notation

Beispiel: algebraische Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ Lambda-Kalkül mit Integers $\mathbb{Z}$ und einfacher Arithmetik

Operator F : soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

$F(f) := f'$, so dass $f'(x) = f(x) - 2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

Mit Lambda-Notation formuliert:

(wenn man Zahlen und arithmetische Operatoren erlaubt)

$F := \lambda f. \lambda x. (f\ x) - 2$

Also: F angewendet auf die "Funktion $f = y^2$ ":

$F(\lambda y. y * y)$ ergibt: $\lambda x. (f\ x) - 2 = \lambda x. x * x - 2$

Freie und gebundene Vorkommen von Variablen

Durch λx ist x im Rumpf s von $\lambda x.s$ **gebunden**.

Kommt x in t vor, so

- ist das Vorkommen **frei**, wenn kein λx darüber steht
- andernfalls ist das Vorkommen **gebunden**

Beispiel:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda w.(x\ y\ z))\ x$$

- x kommt je einmal gebunden und frei vor
- y kommt gebunden vor
- z kommt frei vor

Freie und gebundene Variablen

Menge der freien und gebundenen Variablen

$FV(t)$: Freie Variablen von t

$$FV(x) = x$$

$$FV(\lambda x.s) = FV(s) \setminus \{x\}$$

$$FV(s\ t) = FV(s) \cup FV(t)$$

$BV(t)$: Gebundene Var. von t

$$BV(x) = \emptyset$$

$$BV(\lambda x.s) = BV(s) \cup \{x\}$$

$$BV(s\ t) = BV(s) \cup BV(t)$$

Freie und gebundene Variablen

Menge der freien und gebundenen Variablen

$FV(t)$: Freie Variablen von t

$$FV(x) = x$$

$$FV(\lambda x.s) = FV(s) \setminus \{x\}$$

$$FV(s\ t) = FV(s) \cup FV(t)$$

$BV(t)$: Gebundene Var. von t

$$BV(x) = \emptyset$$

$$BV(\lambda x.s) = BV(s) \cup \{x\}$$

$$BV(s\ t) = BV(s) \cup BV(t)$$

Wenn $FV(t) = \emptyset$, dann sagt man:

t ist geschlossen bzw. t ist ein Programm

Anderenfalls: t ist ein offener Ausdruck

$$\text{Z.B. } BV(\lambda x.(x\ (\lambda z.(y\ z)))) = \{x, z\}$$

$$FV(\lambda x.(x\ (\lambda z.(y\ z)))) = \{y\}$$

Motivation zu Substitution

Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$ a : Idee der Berechnung:
 s' :
 s' ist s wobei jedes x in s durch a ersetzt wird.
(Fast richtig)

Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \text{ id})$ ist $(\lambda y.\text{id})$

Motivation zu Substitution

Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$ a : Idee der Berechnung:
 s' :
 s' ist s wobei jedes x in s durch a ersetzt wird.
 (Fast richtig)

Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \text{ id})$ ist $(\lambda y.\text{id})$

Vorsicht:

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \text{ y})$ ist $(\lambda y.y)?$

Motivation zu Substitution

Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)$ a : Idee der Berechnung:
 s' :
 s' ist s wobei jedes x in s durch a ersetzt wird.
 (Fast richtig)

Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \text{ id})$ ist $(\lambda y.\text{id})$

Vorsicht:

$((\lambda x.(\lambda y.x)) y)$ ist $(\lambda y.y)?$ **NEIN**

Substitution

$s[t/x]$ = Idee: **ersetze** alle **freien Vorkommen** von x in s durch t

Formale Definition (genauer!)

$$\begin{aligned}
 x[t/x] &= t \\
 y[t/x] &= y, \text{ falls } x \neq y \\
 (\lambda y.s)[t/x] &= \begin{cases} \lambda y.(s[t/x]) & \text{falls } x \neq y \\ \lambda y.s & \text{falls } x = y \end{cases} \\
 (s_1 s_2)[t/x] &= (s_1[t/x] s_2[t/x])
 \end{aligned}$$

$$\text{Z.B. } (\lambda x.z x)[(\lambda y.y)/z] = (\lambda x.((\lambda y.y) x))$$

Bedingung: $FV(t) \cap BV(s) = \emptyset$

Substitution

$s[t/x]$ = Idee: ersetze alle freien Vorkommen von x in s durch t

Was immer richtig ist:

- 1 Von innen her in jeder Abstraktion als Teilterm von s die gebundene Variable durch einen komplett neuen Variablennamen ersetzen.
- 2 Dann die Substitution ohne Vorsicht durchführen

Danach nochmal genauso umbenennen.

Kontexte

- **Kontext** = Ausdruck, der an einer Position ein **Loch** $[\cdot]$ anstelle eines Unterausdrucks hat

Als Grammatik:

$$C = [\cdot] \mid \lambda V.C \mid (C \text{ Expr}) \mid (\text{Expr } C)$$

- Sei C ein Kontext und s ein Ausdruck s :
 $C[s]$ = Ausdruck, in dem das Loch in C durch s ersetzt wird
- Beispiel: $C = ([\cdot] (\lambda x.x))$, dann: $C[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) (\lambda x.x))$.
- Das Einsetzen in Kontexte darf/kann freie Variablen einfangen:
 z.B. sei $C = (\lambda x.[\cdot])$, dann $C[\lambda y.x] = (\lambda x.\lambda y.x)$

Alpha-Äquivalenz

Alpha-Umbenennungsschritt

$$C[\lambda x.s] \xrightarrow{\alpha} C[\lambda y.s[y/x]] \text{ falls } y \notin BV(C[\lambda x.s]) \cup FV(C[\lambda x.s])$$

Alpha-Äquivalenz

$=_{\alpha}$ ist die **reflexiv-transitive Hülle** von $\xrightarrow{\alpha}$

- Wir betrachten α -äquivalente Ausdrücke als inhaltlich **gleich**.
- z.B. $\lambda x.x =_{\alpha} \lambda y.y$
- **D**istinct **V**ariable **C**onvention: Alle gebundenen Variablen sind verschieden und gebundene Variablen sind verschieden von freien Variablen.
- Es gibt immer eine Folge von α -Umbenennungen, so dass die DVC danach erfüllt ist.

Beispiel zur DVC und α -Umbenennung

$$(y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y))))$$

Beispiel zur DVC und α -Umbenennung
$$(\textcolor{red}{y} (\lambda y. ((\lambda x. (\textcolor{blue}{x} \textcolor{blue}{x})) (\textcolor{red}{x} \textcolor{blue}{y}))))$$

$\implies$ erfüllt die DVC nicht.

Beispiel zur DVC und α -Umbenennung

$$(y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y))))$$

$\implies$ erfüllt die DVC nicht.

$$\begin{aligned}
 & (y (\lambda y.((\lambda x.(x x)) (x y)))) \\
 \xrightarrow{\alpha} & (y (\lambda y_1.((\lambda x.(x x)) (x y_1)))) \\
 \xrightarrow{\alpha} & (y (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1 x_1)) (x y_1))))
 \end{aligned}$$

$(y (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1 x_1)) (x y_1))))$ erfüllt die DVC

Vorführung LEXP.hs

```

-- run erwartet den Ausdruck als String und reduziert alle Redexe
run str = printExp $ reduce (parse str)

-- runNO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Normalordnung
runNO str = printExp $ reduceNO (parse str)

-- runAO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Anwendungsordnung
runAO str = printExp $ reduceAO (parse str)

-- dvc erwartet den Ausdruck als String und prüft, ob der Ausdruck die
-- Distinct Variable Convention erfüllt
dvc str = dvcexp (parse str)

-- fv erwartet den Ausdruck als String und berechnet das Paar: (gebundene Variablen, freie Variablen)
fv str = fvexp (parse str)

-- alphaEqual s t erwartet zwei Ausdrücke und testet, ob diese alpha-äquivalent sind
alphaEqual s t = alphaeq s t

-- dvcTrans erwartet den Ausdruck als String und berechnet einen
-- alpha-äquivalenten der die dvc erfüllt.
dvcTrans s

```

Substitution: Nochmal genauer

$s[t/x]$ = ersetze alle freien Vorkommen von x in s durch t ,
falls $FV(t) \cap BV(s) = \emptyset$.

= $s'[t/x]$, sonst;
wobei s' aus s durch α -Umbenennung entsteht,
so dass $FV(t) \cap BV(s') = \emptyset$.

Wenn $((\lambda x.s) t)$ die DVC erfüllt,
dann sind die Bedingungen von Fall 1 erfüllt.

Beta-Reduktion

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) t \rightarrow s[t/x]$$

Wenn $e_1 \xrightarrow{\beta} e_2$, dann sagt man e_1 **reduziert unmittelbar** zu e_2 .

Operationale Semantik - Beta-Reduktion

Beta-Reduktion

$$(\beta) \quad (\lambda x.s) \ t \rightarrow s[t/x]$$

Wenn $e_1 \xrightarrow{\beta} e_2$, dann sagt man e_1 **reduziert unmittelbar** zu e_2 .

Beispiele:

$$(\lambda x. \underbrace{x}_s) \ (\underbrace{(\lambda y.y)}_t) \xrightarrow{\beta} x[(\lambda y.y)/x] = \lambda y.y$$

$$(\lambda y. \underbrace{y \ y \ y}_s) \ (\underbrace{(x \ z)}_t) \xrightarrow{\beta} (y \ y \ y)[(x \ z)/y] = (x \ z) \ (x \ z) \ (x \ z)$$

Beta-Reduktion: Umbenennungen

Damit die DVC nach einer β -Reduktion gilt, muss man (manchmal) umbenennen:

$$(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda y.y) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)\ (\lambda y.y) =_{\alpha} (\lambda y_1.y_1)\ (\lambda y_2.y_2)$$

Das wird bei mehreren Reduktionen hintereinander immer gemacht (aber nicht mehr erwähnt)

Operationale Semantik

- Für die **Festlegung der operationalen Semantik** (D.h. der Auswertung von Ausdrücken) des Lambda-Kalküls muss man noch definieren, **wo** in einem Ausdruck (an welcher Stelle im Syntaxbaum) die β -Reduktion angewendet wird

- Betrachte $((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))$.

Zwei Möglichkeiten:

- $((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))$ $\rightarrow ((\lambda y.y)(\lambda z.z)) ((\lambda y.y)(\lambda z.z))$
oder
- $((\lambda x.xx)(\underline{((\lambda y.y)(\lambda z.z))})) \rightarrow ((\lambda x.xx)(\lambda z.z))$.

Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

Definition

- **Reduktionskontexte** $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr})$
- $\xrightarrow{no}$: Wenn $s \xrightarrow{\beta} t$, **dann** ist

$$R[s] \xrightarrow{no} R[t]$$

eine **Normalordnungsreduktion**

Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- **Grob**: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

Definition

- **Reduktionskontexte** $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \text{ Expr})$
- $\xrightarrow{no}$: Wenn $s \xrightarrow{\beta} t$, **dann** ist

$$R[s] \xrightarrow{no} R[t]$$

eine **Normalordnungsreduktion**

$$\begin{aligned}
 \text{Beispiel: } & \xrightarrow{\beta} ((\lambda x.(x \ x)) (\lambda y.y)) ((\lambda w.w) (\lambda z.(z \ z))) \\
 &= (x \ x)[(\lambda y.y)/x] ((\lambda w.w) (\lambda z.(z \ z))) \\
 &= ((\lambda y.y) (\lambda y.y)) ((\lambda w.w) (\lambda z.(z \ z))) \\
 R &= ([\cdot] ((\lambda w.w) (\lambda z.(z \ z))))
 \end{aligned}$$

Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung: $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für s “, d.h. R mit $R[t] = s$ für irgendein t , sind:

- $R = [\cdot]$, Term t ist s selbst,
für s ist aber keine β -Reduktion möglich

Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung: $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für s “, d.h. R mit $R[t] = s$ für irgendein t , sind:

- $R = [\cdot]$, Term t ist s selbst,
für s ist aber keine β -Reduktion möglich
- $R = ([\cdot] ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$,
Term t ist $((\lambda w.w) (\lambda y.y))$

Reduktion möglich: $((\lambda w.w) (\lambda y.y)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)$.

$s = R[((\lambda w.w) (\lambda y.y))] \xrightarrow{no} R[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$

Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung: $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R} \mathbf{Expr})$

Sei $s = ((\lambda w.w) (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$

Alle „Reduktionskontexte für s “, d.h. R mit $R[t] = s$ für irgendein t , sind:

- $R = [\cdot]$, Term t ist s selbst,
für s ist aber keine β -Reduktion möglich

- $R = ([\cdot] ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$,
Term t ist $((\lambda w.w) (\lambda y.y))$

Reduktion möglich: $((\lambda w.w) (\lambda y.y)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)$.

$s = R[(\lambda w.w) (\lambda y.y)] \xrightarrow{no} R[\lambda y.y] = ((\lambda y.y) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u))$

- $R = ([\cdot] (\lambda y.y)) ((\lambda z.(\lambda x.x) z) u)$,
Term t ist $(\lambda w.w)$,
für $(\lambda w.w)$ ist keine β -Reduktion möglich.

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x) (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))^\star$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x) (\lambda y.(y y)))^\star (\lambda z.z))$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 \ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star \ s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y \ y)))) (\lambda z.z))$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)$
- Beispiel 2: $((y z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u)^\star$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))$
- Beispiel 2: $((((y z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))^\star (\lambda u.u)))$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))$
- Beispiel 2: $((((y z)^\star ((\lambda w.w)(\lambda x.x))) (\lambda u.u)))$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))$
- Beispiel 2: $((((y^\star z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x))) (\lambda u.u)))$

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))$
- Beispiel 2: $((((y^\star z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x))) (\lambda u.u)))$

Allgemein: $(s_1 s_2 \dots s_n)^\star$ hat das Ergebnis $(s_1^\star s_2 \dots s_n)$, wobei s_1 keine Anwendung

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $((((\lambda x.x)^\star (\lambda y.(y y))) (\lambda z.z)))$
- Beispiel 2: $((((y^\star z) ((\lambda w.w)(\lambda x.x))) (\lambda u.u)))$

Allgemein: $(s_1 s_2 \dots s_n)^\star$ hat das Ergebnis $(s_1^\star s_2 \dots s_n)$, wobei s_1 keine Anwendung

Falls $s_1 = \lambda x.t$ und $n \geq 2$ dann reduziere:

$$((\lambda x.t) s_2 s_3 \dots s_n) \xrightarrow{no} (t[s_2/x] s_3 \dots s_n)$$

Beispiel

$$(((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u))^{\star}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z))) (\lambda u. u))^\star \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^\star (\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^\star ((\lambda w. w)(\lambda z. z))) (\lambda u. u)) \\
 \xrightarrow{no} & ((\lambda y. ((\lambda w. w)(\lambda z. z))) (\lambda u. u))^\star \\
 \Rightarrow & ((\lambda y. ((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^\star (\lambda u. u)) \\
 \xrightarrow{no} & ((\lambda w. w)(\lambda z. z))^\star \\
 \Rightarrow & ((\lambda w. w)^\star (\lambda z. z)) \\
 \xrightarrow{no} & (\lambda z. z)
 \end{aligned}$$

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (1)

Die Normalordnungsreduktion ist deterministisch:

Für jeden Ausdruck s gibt es **höchstens** ein t
(modulo α -Gleichheit),
so dass $s \xrightarrow{no} t$.

Ausdrücke, für die keine Reduktion möglich ist:

- Reduktion stößt auf freie Variable: z.B. $(x (\lambda y.y))$
(nicht bei geschlossenen Ausdrücken)
- Ausdruck ist eine **WHNF** (weak head normal form), d.h. im Lambda-Kalkül eine Abstraktion.
- Genauer: Ausdruck ist eine **FWHNF**:
FWHNF = Abstraktion
(functional weak head normal form)

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (2)

Weitere Notationen:

$\xrightarrow{no,+}$ = transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
 (mehrere $\xrightarrow{no}$ nacheinander)

$\xrightarrow{no,*}$ = reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
 (keines oder mehrere $\xrightarrow{no}$ nacheinander)

Definition

Ein Ausdruck s **konvergiert** ($s \Downarrow$) gdw. $\exists \text{FWHNF } v : s \xrightarrow{no,*} v$.
 Andernfalls **divergiert** s , Notation $s \Uparrow$

Die Begriffe “konvergieren” (zu einem Wert) und “divergieren” (terminiert nicht) sind aus der wiss. Literatur.

Anmerkungen

- (pures) Haskell verwendet den call-by-name Lambda-Kalkül als **semantische Grundlage**
(man braucht noch Erweiterungen ...)
- Implementierungen verwenden die **call-by-need** Variante:
Vermeidung von Doppelauswertungen (kommt später)
- Call-by-name und call-by-need sind äquivalent (exakte Def kommt noch).
- Call-by-name (und auch call-by-need) sind optimal bzgl. Konvergenz:

Aussage (Standardisierung)

Sei s ein Lambda-Ausdruck. Wenn s mit beliebigen β -Reduktionen (an beliebigen Positionen) in eine Abstraktion v überführt werden kann, dann gilt $s \Downarrow$.

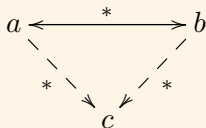
Church-Rosser Theorem

Für den Lambda-Kalkül gilt (unter der Gleichheit $=_\alpha$)

Satz (Konfluenz)

Church-Rosser Eigenschaft:

Wenn $a \leftrightarrow^* b$, dann existiert c , so dass $a \rightarrow^* c$ und $b \rightarrow^* c$



Hierbei bedeutet:

$\rightarrow^*$ beliebige Folge von β -Reduktionen (in bel. Kontext), und

$\leftrightarrow^*$ beliebige Folge von β -Reduktionen (vorwärts und rückwärts)
(in bel. Kontext)

Anwendungsordnung im Lambda-Kalkül

Diese Reduktionsstrategie wird verwendet
in Programmiersprachen die strikt auswerten.

z.B. Wenn $x = 3$, $y = 2$:

$$\begin{aligned} 3 + (x*x - y*y) &\rightarrow 3 + (9 - 2*2) \rightarrow 3 + (9 - 4) \\ &\rightarrow 3 + 5 \rightarrow 8 \end{aligned}$$

D.h. erst das Argument, dann die Funktionsanwendung.

- Sprechweisen: Anwendungsordnung, **call-by-value (CBV)**, **strikt**
- **Grobe Umschreibung:**
Argumentauswertung vor Definitionseinsetzung

Anwendungsordnung im Lambda-Kalkül

Call-by-value Beta-Reduktion

$$(\beta_{cbv}) \quad (\lambda x.s) v \rightarrow s[v/x], \text{ nur wenn } v \text{ Abstraktion oder Variable}$$

Definition

CBV-Reduktionskontexte **E**:

$$\mathbf{E} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{E} \text{ Expr}) \mid ((\lambda V.\text{Expr}) \mathbf{E})$$

Wenn $s \xrightarrow{\beta_{cbv}} t$,
dann ist $E[s] \xrightarrow{ao} E[t]$ eine **Anwendungsordnungsreduktion**

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$
 - $(v^\star s) \Rightarrow (v s^\star)$
falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 \ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star \ s_2)$
 - $(v^\star \ s) \Rightarrow (v \ s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))^\star$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$
 - $(v^\star s) \Rightarrow (v s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))) u)^\star (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$
 - $(v^\star s) \Rightarrow (v s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z))))^\star u) (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 \ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star \ s_2)$
 - $(v^\star \ s) \Rightarrow (v \ s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $((((\lambda x.x)^\star (((\lambda y.y) \ v) (\lambda z.z)))) \ u) (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit s^*
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
 - $(v^* s) \Rightarrow (v s^*)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v) (\lambda z.z)))^*) u) (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 \ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star \ s_2)$
 - $(v^\star \ s) \Rightarrow (v \ s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y) v)^\star (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit s^*
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^* \Rightarrow (s_1^* s_2)$
 - $(v^* s) \Rightarrow (v s^*)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y)^* v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die folgenden Regeln an solange es geht:
 - $(s_1 s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star s_2)$
 - $(v^\star s) \Rightarrow (v s^\star)$
 falls v eine Abstraktion und
 s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $(((((\lambda x.x) (((\lambda y.y)^\star v) (\lambda z.z)))) u) (\lambda w.w))$

Falls danach gilt: $C[(\lambda x.s)^\star v]$ dann

$$C[(\lambda x.s)^\star v] \xrightarrow{ao} C[s[v/x]]$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z))) (\lambda u. u))^\star \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z)))^\star (\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^\star ((\lambda w. w)(\lambda z. z))) (\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)(\lambda z. z))^\star) (\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)((\lambda w. w)^\star (\lambda z. z))) (\lambda u. u)) \\
 \\
 & \xrightarrow{ao} (((\lambda x. \lambda y. x)(\lambda z. z)) (\lambda u. u))^\star \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)(\lambda z. z))^\star (\lambda u. u)) \\
 \Rightarrow & (((\lambda x. \lambda y. x)^\star (\lambda z. z)) (\lambda u. u)) \\
 \\
 & \xrightarrow{ao} ((\lambda y. \lambda z. z) (\lambda u. u))^\star \\
 \Rightarrow & ((\lambda y. \lambda z. z)^\star (\lambda u. u)) \\
 \\
 & \xrightarrow{ao} (\lambda z. z)
 \end{aligned}$$

- Auch die call-by-value Reduktion ist deterministisch.

Definition

Ein Ausdruck s **call-by-value konvergiert** ($s \Downarrow_{ao}$), gdw.

$\exists$ FWHNF $v : s \xrightarrow{ao,*} v$.

Ansonsten (call-by-value) divergiert s , Notation: $s \Uparrow_{ao}$.

- Auch die call-by-value Reduktion ist deterministisch.

Definition

Ein Ausdruck s **call-by-value konvergiert** ($s \Downarrow_{ao}$), gdw.

$\exists$ FWHNF $v : s \xrightarrow{ao,*} v$.

Ansonsten (call-by-value) divergiert s , Notation: $s \Uparrow_{ao}$.

- Es gilt: $s \Downarrow_{ao} \implies s \Downarrow$.
- Die Umkehrung gilt **nicht!**

$((\lambda y.(\lambda x.x)) \Omega) \Uparrow_{ao}$

aber

$((\lambda y.(\lambda x.x)) \Omega) \Downarrow_{no}$

Wobei: $\Omega = (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$

da: $((\lambda y.(\lambda x.x)) \Omega) \rightarrow_{no} (\lambda x.x)$

Eigenschaften

Vorteile der Anwendungsordnung (call-by-value):

- Tlw. besseres Platzverhalten
- Auswertungsreihenfolge liegt fest:
(im Syntaxbaum von Funktionen f); bzw. ist innerhalb jeder Funktionsdefinition vorhersagbar.
Bei AO: $f\ s_1\ s_2\ s_3$: immer zuerst s_1 , dann s_2 , dann s_3 , dann $(f\ s_1\ s_2\ s_3)$
Bei NO: zum Beispiel: zuerst s_1 , dann evtl. abhängig vom Wert von s_1 :
zuerst s_2 , dann s_3 , oder andersrum,
oder evtl. weder s_2 noch s_3 .
Dazwischen auch Auswertung von Anteilen von $(f\ s_1\ s_2\ s_3)$.
- Wegen der vorhersagbaren Auswertungsreihenfolge (in Funktionsdefinitionen) unter AO:
Seiteneffekte können unter AO kompiliert werden; und sind nicht abhängig von Bedingungen.

In Haskell: seq

In Haskell: (Lokale) strikte Auswertung kann mit `seq` erzwungen werden.

$$\begin{array}{ll} \text{seq } a \ b = b & \text{falls } a \Downarrow \\ (\text{seq } a \ b) \Uparrow & \text{falls } a \Uparrow \end{array}$$

- in Anwendungsordnung ist `seq` kodierbar, aber unnötig
- in Normalordnung:
 - seq kann nicht im Lambda-Kalkül kodiert werden!
 - seq kann auch nicht in erweiterten Kernsprachen kodiert werden!
 - seq muss also **explizit** in Haskell eingebaut werden.

Beispiel zu seq in Haskell

```
fak 0 = 1  
fak x = x * fak(x-1)
```

Auswertung von fak n:

fak n

→ n * fak (n-1)

→ n * ((n-1) * fak (n-2))

→ ...

→ n * ((n-1) * ((n-2) * * (2 * 1)))

→ n * ((n-1) * ((n-2) * * 2))

→ ...

Problem: Linearer Platzbedarf

Beispiel zu seq (2)

Version mit seq:

```
fak' x      = fak'' x 1

fak'' 0 y = y
fak'' x y = let m = x*y in seq m (fak'' (x-1) m)
```

Auswertung in etwa:

```
fak' 5
→ fak'' 5 1
→ let m=5*1 in seq m (fak'' (5-1) m)
→ let m=5 in seq m (fak'' (5-1) m)
→ (fak'' (5-1) 5)
→ (fak'' 4 5)
→ let m = 4*5 in seq m (fak'' (4-1) m)
→ let m = 20 in seq m (fak'' (4-1) m)
→ (fak'' (4-1) 20)
→ ...
```

Jetzt: konstanter Platzbedarf, da Zwischenprodukt m berechnet wird (erzwungen durch seq) und sharing mittels let.

Beispiele

- $\Omega := (\lambda x.x\ x) (\lambda x.x\ x).$
- $\Omega \xrightarrow{no} \Omega$. Daraus folgt: $\Omega \uparrow$
- $\Omega \xrightarrow{ao} \Omega$. Daraus folgt: $\Omega \uparrow_{ao}$.
- $t := ((\lambda x.(\lambda y.y))\ \Omega).$
- $t \xrightarrow{no} \lambda y.y$, d.h. $t \Downarrow$.
- $t \xrightarrow{ao} t$, also $t \uparrow_{ao}$ denn die Anwendungsordnung muss zunächst das Argument Ω auswerten.

Hinweise zur **verzögerten Auswertung**

- Sprechweisen: Verzögerte Auswertung, **call-by-need**, **nicht-strikt**, **lazy**, (Reduktion mit Sharing)
- Optimierung der Normalordnungsreduktion

Verzögerte Auswertung kann durch Erweiterung des Lambda-Kalküls mit `let` modelliert werden:

Call-by-need Lambda-Kalkül mit `let`-Syntax:

$\text{Expr} ::= V \mid \lambda V. \text{Expr} \mid (\text{Expr Expr}) \mid \text{let } V = \text{Expr in Expr}$

- Zur Modellierung des sharing (von call-by-need) reicht die einfachere Variante eines **nicht-rekursiven** `let`:
in `let x = s in t` muss gelten $x \notin FV(s)$ (siehe Skript)
- Aber: **Haskell** verwendet **rekursives `let`!** (deswegen komplizierter zu erklären)

Einschub: Programmieren mit let in Haskell

- let in Haskell ist **viel allgemeiner** als das einfache nicht-rekursive let.
- Haskell's let für **lokale Funktionsdefinitionen**:

$$\begin{aligned}
 \text{let } f_1 x_{1,1} \dots x_{1,n_1} &= e_1 \\
 f_2 x_{2,1} \dots x_{2,n_2} &= e_2 \\
 &\dots \\
 f_m x_{m,1} \dots x_{m,n_m} &= e_m \\
 \text{in } \dots
 \end{aligned}$$

Definiert die Funktionen $f_1, \dots, f_m$ (auch verschränkt rekursiv)

Beispiel:

```
f x y = let quadrat z = z*z
        in quadrat x + quadrat y
```

Rekursives let in Haskell

Verschränkt-rekursives let erlaubt:

```
quadratfakultaet x =  
    let quadrat z = z*z  
        fakq      0 = 1  
        fakq      x = (quadrat x)*fakq (x-1)  
    in fakq x
```

Sharing von Ausdrücken mittels let:

```
verdopplefak x =  
    let fak 0 = 1  
        fak x = x*fak (x-1)  
        fakx = fak x  
    in fakx + fakx
```

```
verdopplefakLangsam x =  
    let fak 0 = 1  
        fak x = x*fak (x-1)  
    in fak x + fak x
```

verdopplefak 100 berechnet nur einmal fak 100, im Gegensatz zu verdopplefakLangsam.

Pattern-Matching mit let

Links in einer let-Bindung in Haskell darf auch ein **Pattern** stehen.

Beispiel: $\sum_{i=1}^n i$ und $\prod_{i=1}^n i$ in einer rekursiven Funktion:

```
sumprod 1 = (1,1)
sumprod n = let (s',p') = sumprod (n-1)
             in (s'+n,p'*n)
```

Das Paar aus dem rekursiven Aufruf wird mit Pattern Matching am let zerlegt!

Beispiel: Fibonacci-Zahl

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib i = fib (i-1) + fib (i-2)
```

sehr schlechte Laufzeit!

n	gemessene Zeit im ghci für fib n
30	9.75sec
31	15.71sec
32	25.30sec
33	41.47sec
34	66.82sec
35	108.16sec

Memoization (2)

Besser:

```
-- Fibonacci mit Memoization
fibM i =
  let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
  in fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
```

n	gemessene Zeit im ghci für fibM n
1000	0.05sec
10000	1.56sec
20000	7.38sec
30000	23.29sec

Bei mehreren Aufrufen, noch besser:

```
fibM' =
  let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
  in \i -> fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
```

where-Ausdrücke (1)

where-Ausdrücke sind ähnlich zu let.

Z.B.

```
sumprod' 1 = (1,1)
sumprod' n = (s'+n,p'*n)
  where (s',p') = sumprod' (n-1)
```

where-Ausdrücke (2)

Beachte: `(let ... in e)` ist ein **Ausdruck**, aber `e where ...` nicht
where kann man um Guards herum schreiben (let nicht):

```
f x
| x == 0      = a
| x == 1      = a*a
| otherwise   = a*f (x-1)
where a = 10
```

Dafür geht

```
f x = \y -> mul
      where mul = x * y
```

nicht! (da `y` nicht bekannt in der `where`-Deklaration)

Gleichheit

Kalküle bisher:

- Call-by-Name Lambda-Kalkül: Ausdrücke, $\xrightarrow{no}$, $\Downarrow$
- Call-by-Value Lambda-Kalkül: Ausdrücke, $\xrightarrow{ao}$, $\Downarrow_{ao}$
- (Call-by-Need Lambda-Kalkül ...)

D.h. Syntax + Operationale Semantik.

Es fehlt:

- Begriff: Wann sind zwei Ausdrücke gleich(wertig)?
- D.h. insbesondere: Wann darf ein Compiler einen Ausdruck durch einen anderen ersetzen?

Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke s, t sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler: s, t sind gleich, wenn für alle Kontexte C gilt:
 $C[s]$ und $C[t]$ **verhalten sich gleich**.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke s, t sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler: s, t sind gleich, wenn für alle Kontexte C gilt:
 $C[s]$ und $C[t]$ verhalten sich gleich.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke s, t sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler: s, t sind gleich, wenn für alle Kontexte C gilt:
 $C[s]$ und $C[t]$ verhalten sich gleich.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

Gleichheit (2)

- **Leibnizsches Prinzip:** Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. (fast) aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke s, t sind gleich, wenn man sie **nicht unterscheiden** kann, egal in **welchem Kontext** man sie benutzt.
- Formaler: s, t sind gleich, wenn für alle Kontexte C gilt:
 $C[s]$ und $C[t]$ verhalten sich gleich.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der **Terminierung** (Konvergenz) (ergibt das Gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").
- Man verwendet hier i.a. nicht die Effizienz, da die Unterscheidung dann zu fein ist und dadurch Optimierung verhindert würde.

Gleichheit (3)

Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$ gdw. $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$

Gleichheit (3)

Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$ gdw. $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$
- $s \sim_c t$ gdw. $s \leq_c t$ und $t \leq_c s$

Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$ gdw. $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$
- $s \sim_c t$ gdw. $s \leq_c t$ und $t \leq_c s$

Call-by-Value Lambda-Kalkül:

- $s \leq_{c,ao} t$ gdw. $\forall C : \text{Wenn } C[s], C[t] \text{ geschlossen sind und } C[s] \Downarrow_{ao}, \text{ dann auch } C[t] \Downarrow_{ao}.$
- $s \sim_{c,ao} t$ gdw. $s \leq_{c,ao} t$ und $t \leq_{c,ao} s$

Gleichheit (4)

- $\sim_c$ und $\sim_{ao}$ sind **Kongruenzen**
- **Kongruenz** = Äquivalenzrelation + kompatibel mit Kontexten, d.h. $s \sim t \implies C[s] \sim C[t]$.
- Gleichheit beweisen i.a. schwer, widerlegen i.a. einfach.

Gleichheit (4)

- $\sim_c$ und $\sim_{ao}$ sind **Kongruenzen**
- **Kongruenz** = Äquivalenzrelation + kompatibel mit Kontexten, d.h. $s \sim t \implies C[s] \sim C[t]$.
- Gleichheit beweisen i.a. schwer, widerlegen i.a. einfach.

Anmerkung zu „ $C[s], C[t]$ geschlossen“ bei $\sim$

- $\sim_c$ ändert sich nicht beim Übergang auf $C[s], C[t]$ geschlossen, aber $\sim_{c,ao}$.
- $\sim_{c,ao}$ wird auch in erweiterten Kalkülen so definiert, und:
- $\sim_{c,ao}$ hat unter der closed-Bedingung mehr sinnvolle Gleichheiten als ohne diese Bedingung (in den erweiterten Kalkülen)

Gleichheit (5)

Beispiele für Gleichheiten, Ungleichheiten, Implikation von Relationen:

- $(\lambda x, y.x)(\lambda z.z) \sim_c \lambda y.(\lambda z.z)$,
Allgemeiner:
- $(\beta) \subseteq \sim_c$
- $(\beta_{cbv}) \subseteq \sim_{c,ao}$ aber $(\beta) \not\subseteq \sim_{c,ao}$
- $\sim_c \not\subseteq \sim_{c,ao}$ und $\sim_{c,ao} \not\subseteq \sim_c$

Gleichheit (6)

Praktische Bedeutung der Gleichheit:

- Compiler darf Gleiches durch Gleiches ersetzen!
- Kann zur Optimierung verwendet werden.
- Man braucht noch Wissen darüber, welche Variante effizienter ist,
bzw. welche unter bestimmten Bedingungen effizienter ist.