GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen:

Einleitung & Der Lambda-Kalkül

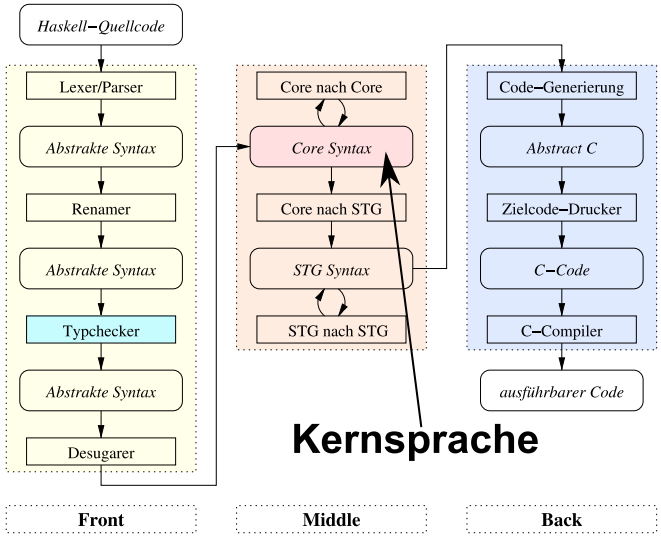
Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

WS 2021/22

Stand der Folien: 19. Oktober 2021

Übersicht

Compilerphasen des GHC (schematisch)



Einleitung

- Wir betrachten zunächst den Lambda-Kalkül
- Er ist „Kernsprache“ fast aller (funktionalen) Programmiersprachen
- Allerdings oft zu minimalistisch,
  später: Erweiterte Lambda-Kalküle
- Kalkül: Syntax und Semantik
- Sprechweise: der Kalkül (da mathematisch)

Kalküle

Syntax

- Legt fest, welche Programme (Ausdrücke) gebildet werden dürfen
- Welche Konstrukte stellt der Kalkül zu Verfügung?

Semantik

- Legt die Bedeutung der Programme fest
- Gebiet der formalen Semantik kennt verschiedene Ansätze
  → kurzer Überblick auf den nächsten Folien

Ansätze zur Semantik

Axiomatische Semantik

- Beschreibung von Eigenschaften von Programmen mithilfe logischer Axiome und Schlussregeln
- Herleitung neuer Eigenschaften mit den Schlussregeln
- Prominentes Beispiel: Hoare-Logik, z.B.
  Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$:
  Vorbedingung P, Programm S, Nachbedingung Q
  Schlussregel z.B.:

$$\text{Sequenz: } \frac{\{P\}S\{Q\}, \{Q\}T\{R\}}{\{P\}S;T\{R\}}$$

- Erfasst i.a. nur einige Eigenschaften, nicht alle, von Programmen

Ansätze zur Semantik (2)

Denotationale Semantik

- Abbildung von Programmen in mathematische (Funktionen-)Räume durch Semantische Funktion
- Oft Verwendung von partiell geordneten Mengen (Domains)
- Z.B. $[\![\cdot]\!]$ als semantische Funktion:

$$[\![\texttt{if } a \texttt{ then } b \texttt{ else } c]\!] = \begin{cases} [\![b]\!], & \text{falls } [\![a]\!] = \texttt{True} \\ [\![c]\!], & \text{falls } [\![a]\!] = \texttt{False} \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist eher mathematisch
- Schwierigkeit steigt mit dem Umfang der Syntax
- Nicht immer unmittelbar anwendbar (z.B. Nebenläufigkeit)

Ansätze zur Semantik (3)

Operationale Semantik

- definiert genau die Auswertung/Ausführung von Programmen
- definiert einen Interpreter
- Verschiedene Formalismen:
  - Zustandsübergangssysteme
  - Abstrakte Maschinen
  - Ersetzungssysteme
- Unterscheidung in small-step und big-step Semantiken
- Wir werden bevorzugt operationale (small-step) Semantiken verwenden

Der Lambda-Kalkül als Semantik

Lambda-Kalkül als Semantik
auch für imperative Programmiersprachen

- Lambda-Kalkül wird oft als semantischer Bereich für andere Programmiersprachen genutzt:

  Abbildung von Programmen/Ausdrücken in den Lambda-Kalkül.
- Grund ist, dass es eindeutig ist und sehr genau bekannt ist, wie man mit Namen, Funktionen, Funktionsanwendungen im Lambda-Kalkül umgeht.

Der Lambda-Kalkül

- Von Alonzo Church und Stephen Kleene in den 1930er Jahren eingeführt
- Idee und Ziel: Darstellungen der Berechnung von Funktionen

  $x \mapsto f(x)$ x ist Eingabe; $f(x)$ Ausgabe

  Mechanisches Rechenverfahren mit Funktionen (Alternative zu Turing-Maschine)
- Beispiele
- Der Lambda-Kalkül ist minimal: es geht NUR um Funktionen. Man definiert Funktionen; die Argumente sind ebenfalls Funktionen.

Der Lambda-Kalkül

- Wir betrachten den ungetypten Lambda-Kalkül.
- Wir geben die (eine) Auswertung als operationale Semantik an.
  Church, Kleene und auch andere Artikel / Bücher gehen meist axiomatisch vor (mit Gleichheitsaxiomen)
- Der ungetypte Lambda-Kalkül ist Turing-mächtig.
- Viele Ausdrücke des Lambda-Kalküls können in Haskell eingegeben werden, aber nur wenn sie Haskell-typisierbar sind.
- Haskell-Programm zur Auswertung von beliebigen Lambda-Ausdrücken:LExp.hs (siehe Webseite)

Berechnung im Lambda-Kalkül (informell)

vereinfachte Beispiele

$(\lambda x.x)\ object$	$\longrightarrow$	$object$	Identität
$(\lambda\ x\ y.x)\ o1\ o2$	$\longrightarrow$	$o1$	Projektion links
$(\lambda\ x\ y.y)\ o1\ o2$	$\longrightarrow$	$o2$	Projektion rechts
$(\lambda\ x\ y\ z.y)\ o1\ o2\ o3$	$\longrightarrow$	$o2$	Projektion
$(\lambda\ f\ g\ x.f\ (g\ x))\ F\ G\ a$	$\longrightarrow$	$F\ (G\ a)$	Komposition von Funktionen

Syntax des Lambda-Kalküls

Expr	::=	V	Variable (unendliche Menge)
	|	$\lambda V.\mathbf{Expr}$	Abstraktion
	|	$(\mathbf{Expr}\ \mathbf{Expr})$	Anwendung (Applikation)

- Abstraktionen sind anonyme Funktionen

  Z. B. $id(x) = x$ in Lambda-Notation: $\lambda x.x$
- Haskell: `\x -> s` statt $\lambda x.s$
- $(s\ t)$ erlaubt die Anwendung von Funktionen auf Argumente

  s, t beliebige Ausdrücke $\Longrightarrow$ Lambda Kalkül ist higher-order

  Z. B. $(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)$ (entspricht gerade $id(id)$)

Syntax des Lambda-Kalküls (2)

Assoziativitäten, Prioritäten und Abkürzungen

- Klammerregeln: $s\ r\ t$ entspricht $(s\ r)\ t$
- Priorität: Rumpf einer Abstraktion so groß wie möglich:

  $\lambda x.x\ y$ ist $\lambda x.(x\ y)$ und nicht $((\lambda x.y)\ x)$
- $\lambda x, y, z.s$ entspricht $\lambda x.\lambda y.\lambda z.s$ entspricht $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.s))$

Syntax des Lambda-Kalküls (3)

Oft vorkommende Ausdrücke (Kombinatoren)

I	:=	$\lambda x.x$	Identität
K	:=	$\lambda x.\lambda y.x$	Projektion auf Argument 1
$K2$	:=	$\lambda x.\lambda y.y$	Projektion auf Argument 2
Ω	:=	$(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(x\ x))$	terminiert nicht
Y	:=	$\lambda f.(\lambda x.(f\ (x\ x)))\ (\lambda x.(f\ (x\ x)))$	Fixpunkt Kombinator
S	:=	$\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ z)\ (y\ z)$	S- Kombinator zum SKI-calculus

Y' := $\lambda f.(\lambda x.(\lambda y.(f\ (x\ x\ y))))\ (\lambda x.(\lambda y.(f\ (x\ x\ y))))$

Fixpunkt Kombinator Variante für call-by-value

Beispiel zur Lambda-Notaion

Beispiel: algebraische Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
Lambda-Kalkül mit Integers $\mathbb{Z}$ und einfacher Arithmetik

Operator F: soll Funktionen um 2 nach unten verschieben.

$F(f) := f'$, so dass $f'(x) = f(x) - 2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

Mit Lambda-Notation formuliert
(wenn man Zahlen und arithmetische Operatoren erlaubt)
$F := \lambda f.\lambda x.(f\ x) - 2$

Freie und gebundene Vorkommen von Variablen

Durch λx ist x im Rumpf s von $\lambda x.s$ gebunden.
Kommt x in t vor, so

- ist das Vorkommen frei, wenn kein λx darüber steht
- anderenfalls ist das Vorkommen gebunden

Beispiel:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda w.(x\ y\ z))\ x$$

- x kommt je einmal gebunden und frei vor
- y kommt gebunden vor
- z kommt frei vor

Freie und gebundene Variablen

Menge der freien und gebundenen Variablen

$FV(t)$: Freie Variablen von t

$$\begin{aligned} FV(x) &= x \\ FV(\lambda x.s) &= FV(s) \setminus \{x\} \\ FV(s\ t) &= FV(s) \cup FV(t) \end{aligned}$$

$BV(t)$: Gebundene Var. von t

$$\begin{aligned} BV(x) &= \emptyset \\ BV(\lambda x.s) &= BV(s) \cup \{x\} \\ BV(s\ t) &= BV(s) \cup BV(t) \end{aligned}$$

Wenn $FV(t) = \emptyset$, dann sagt man:

t ist geschlossen bzw. t ist ein Programm

Anderenfalls: t ist ein offener Ausdruck

Z.B. $BV(\lambda x.(x\ (\lambda z.(y\ z)))) = \{x, z\}$
$FV(\lambda x.(x\ (\lambda z.(y\ z)))) = \{y\}$

Motivation zu Substitution

Anwendung einer Funktion auf ein Argument!

$(\lambda x.s)\ a$: kann berechnet werden als:
s':
s' ist s wobei jedes x in s durch a ersetzt wird.
(Substitution!)

Beispiel

$((\lambda x.(\lambda y.x))\ id)$ ist $(\lambda y.id)$
$((\lambda x.(\lambda y.x))\ y)$ ist $(\lambda y.y)$? NEIN

Substitution

$s[t/x]$ = ersetze alle freien Vorkommen von x in s durch t

Formale Definition (genauer!)

$$\begin{aligned} x[t/x] &= t \\ y[t/x] &= y, \text{ falls } x \neq y \\ (\lambda y.s)[t/x] &= \begin{cases} \lambda y.(s[t/x]) & \text{falls } x \neq y \\ \lambda y.s & \text{falls } x = y \end{cases} \\ (s_1\ s_2)[t/x] &= (s_1[t/x]\ s_2[t/x]) \end{aligned}$$

Z.B. $(\lambda x.z\ x)[(\lambda y.y)/z] = (\lambda x.((\lambda y.y)\ x))$

Bedingung: $FV(t) \cap BV(s) = \emptyset$

Kontexte

- Kontext = Ausdruck, der an einer Position ein Loch $[\cdot]$ anstelle eines Unterausdrucks hat

Als Grammatik:

$$\mathbf{C} = [\cdot] \mid \lambda V.\mathbf{C} \mid (\mathbf{C}\ \mathbf{Expr}) \mid (\mathbf{Expr}\ \mathbf{C})$$

- Sei C ein Kontext und s ein Ausdruck s:
  $C[s]$ = Ausdruck, in dem das Loch in C durch s ersetzt wird
- Beispiel: $C = ([\cdot]\ (\lambda x.x))$, dann: $C[\lambda y.y] = ((\lambda y.y)\ (\lambda x.x))$.
- Das Einsetzen in Kontexte darf/kann freie Variablen einfangen:
  z.B. sei $C = (\lambda x.[\cdot])$, dann $C[\lambda y.x] = (\lambda x.\lambda y.x)$

Alpha-Äquivalenz

Alpha-Umbenennungsschritt

$$C[\lambda x.s] \xrightarrow{\alpha} C[\lambda y.s[y/x]] \text{ falls } y \notin BV(C[\lambda x.s]) \cup FV(C[\lambda x.s])$$

Alpha-Äquivalenz

$=_\alpha$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{\alpha}$

- Wir betrachten α-äquivalente Ausdrücke als gleich.
- z.B. $\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y$
- Distinct Variable Convention: Alle gebundenen Variablen sind verschieden und gebundene Variablen sind verschieden von freien Variablen.
- Es gibt immer eine Folge von α-Umbenennungen, so dass die DVC danach erfüllt ist.

Beispiel zur DVC und α-Umbenennung

$$(y\ (\lambda y.((\lambda x.(x\ x))\ (x\ y))))$$

$\Longrightarrow$ erfüllt die DVC nicht.

$$\begin{array}{ll} & (y\ (\lambda y.((\lambda x.(x\ x))\ (x\ y)))) \\ \xrightarrow{\alpha} & (y\ (\lambda y_1.((\lambda x.(x\ x))\ (x\ y_1)))) \\ \xrightarrow{\alpha} & (y\ (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1\ x_1))\ (x\ y_1)))) \end{array}$$

$(y\ (\lambda y_1.((\lambda x_1.(x_1\ x_1))\ (x\ y_1))))$ erfüllt die DVC

Vorführung LEXP.hs

```
-- run erwartet den Ausdruck als String und reduziert alle Redexe
run str = printExp $ reduce (parse str)

-- runNO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Normalordnung
runNO str = printExp $ reduceNO (parse str)

-- runAO erwartet den Ausdruck als String und reduziert in Anwendungsordnung
runAO str = printExp $ reduceAO (parse str)

-- dvc erwartet den Ausdruck als String und pr"uft, ob der Ausdruck die
-- Distinct Variable Convention erf"ullt
dvc str = dvcexp (parse str)

-- fv erwartet den Ausdruck als String und berechnet das Paar: (gebundene Variablen, freie Variablen)
fv str = fvexp (parse str)

-- alphaEqual s t erwartet zwei Ausdr"ucke und testet, ob diese alpha-equivalent sind

alphaEqual s t  = alphaeq s t

--  dvcTrans  erwartet den Ausdruck als String und berechnet einen
--    alpha-aequivalenten der die dvc erfuellt.
dvcTrans s
```

Substitution: Nochmal genauer

$s[t/x]$ = ersetze alle freien Vorkommen von x in s durch t,
falls $FV(t) \cap BV(s) = \emptyset$.

= $s'[t/x]$, sonst;
wobei s' aus s durch α-Umbenennung entsteht,
so dass $FV(t) \cap BV(s') = \emptyset$.

Wenn $((\lambda x.s)\ t)$ die DVC erfüllt,
dann sind die Bedingungen von Fall 1 erfüllt.

Operationale Semantik - Beta-Reduktion

Beta-Reduktion

$$(\beta) \qquad (\lambda x.s)\ t \to s[t/x]$$

Wenn $e_1 \xrightarrow{\beta} e_2$, dann sagt man e_1 reduziert unmittelbar zu e_2.

Beispiele:

$$(\lambda x.\underbrace{x}_{s})\ \underbrace{(\lambda y.y)}_{t} \xrightarrow{\beta} x[(\lambda y.y)/x] = \lambda y.y$$

$$(\lambda y.\underbrace{y\ y\ y}_{s})\ \underbrace{(x\ z)}_{t} \xrightarrow{\beta} (y\ y\ y)[(x\ z)/y] = (x\ z)\ (x\ z)\ (x\ z)$$

Beta-Reduktion: Umbenennungen

Damit die DVC nach einer β-Reduktion gilt, muss man (manchmal) umbenennen:

$$(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda y.y) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)\ (\lambda y.y) =_\alpha (\lambda y_1.y_1)\ (\lambda y_2.y_2)$$

Das wird bei mehreren Reduktionen hintereinander immer gemacht (aber nicht mehr erwähnt)

Operationale Semantik

- Für die Festlegung der operationalen Semantik des Lambda-Kalküls muss man noch definieren, wo in einem Ausdruck (an welcher Stelle im Syntaxbaum) die β-Reduktion angewendet wird
- Betrachte $((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))$.

  Zwei Möglichkeiten:
- $\underline{((\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z)))} \to ((\lambda y.y)(\lambda z.z))\ ((\lambda y.y)(\lambda z.z))$
  oder
- $((\lambda x.xx)\underline{((\lambda y.y)(\lambda z.z))}) \to ((\lambda x.xx)(\lambda z.z))$.

Normalordnungsreduktion

- Sprechweisen: Normalordnung, **call-by-name**, **nicht-strikt**, **lazy**
- Grob: Definitionseinsetzung ohne Argumentauswertung

Definition

- Reduktionskontexte $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr})$
- $\xrightarrow{no}$: Wenn $s \xrightarrow{\beta} t$, dann ist

$$R[s] \xrightarrow{no} R[t]$$

eine Normalordnungsreduktion

Beispiel:
$$\begin{array}{rl} & ((\lambda x.(x\ x))\ (\lambda y.y))\ ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ z))) \\ \xrightarrow{\beta} & (x\ x)[(\lambda y.y)/x]\ ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ z))) \\ = & ((\lambda y.y)\ (\lambda y.y))\ ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ z))) \end{array}$$
$$R = ([\cdot]\ ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ z))))$$

Reduktionskontexte: Beispiele

Zur Erinnerung: $\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr})$

Sei $s = ((\lambda w.w)\ (\lambda y.y))\ ((\lambda z.(\lambda x.x)\ z)\ u)$

Alle „Reduktionskontexte für s“, d.h. R mit $R[t] = s$ für irgendein t, sind:

- $R = [\cdot]$, Term t ist s selbst,
  für s ist aber keine β-Reduktion möglich
- $R = ([\cdot]\ ((\lambda z.(\lambda x.x)\ z)\ u))$,
  Term t ist $((\lambda w.w)\ (\lambda y.y))$
  Reduktion möglich: $((\lambda w.w)\ (\lambda y.y)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)$.
  $s = R[((\lambda w.w)\ (\lambda y.y))] \xrightarrow{no} R[\lambda y.y] = ((\lambda y.y)\ ((\lambda z.(\lambda x.x)\ z)\ u))$
- $R = ([\cdot]\ (\lambda y.y))\ ((\lambda z.(\lambda x.x)\ z)\ u)$,
  Term t ist $(\lambda w.w)$,
  für $(\lambda w.w)$ ist keine β-Reduktion möglich.

Redexsuche: Markierungsalgorithmus

- s ein Ausdruck.
- Start: $s^\star$
- Verschiebe-Regel

$$(s_1\ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star\ s_2)$$

so oft anwenden wie möglich.

- Beispiel 1: $(((\lambda x.x)\ (\lambda y.(y\ y)))\ (\lambda z.z))^\star$
- Beispiel 2: $(((y\ z)\ ((\lambda w.w)(\lambda x.x)))(\lambda u.u))^\star$

Allgemein: $(s_1\ s_2\ \ldots\ s_n)^\star$ hat das Ergebnis $(s_1^\star\ s_2\ \ldots\ s_n)$, wobei s_1 keine Anwendung

Falls $s_1 = \lambda x.t$ und $n \geq 2$ dann reduziere:

$$((\lambda x.t)\ s_2\ s_3\ \ldots s_n) \xrightarrow{no} (t[s_2/x]\ s_3\ \ldots s_n)$$

Beispiel

$$\begin{array}{rl} & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u))^\star \\ \Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))^\star(\lambda u.u)) \\ \Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)^\star((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u)) \\ \xrightarrow{no} & ((\lambda y.((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u))^\star \\ \Rightarrow & ((\lambda y.((\lambda w.w)(\lambda z.z)))^\star(\lambda u.u)) \\ \xrightarrow{no} & ((\lambda w.w)(\lambda z.z))^\star \\ \Rightarrow & ((\lambda w.w)^\star(\lambda z.z)) \\ \xrightarrow{no} & (\lambda z.z) \end{array}$$

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (1)

Die Normalordnungsreduktion ist deterministisch:

Für jeden Ausdruck s gibt es höchstens ein t
(modulo α-Gleichheit),
so dass $s \xrightarrow{no} t$.

Ausdrücke, für die keine Reduktion möglich ist:

- Reduktion stößt auf freie Variable: z.B. $(x\ (\lambda y.y))$
  (nicht bei geschlossenen Ausdrücken)
- Ausdruck ist eine WHNF (weak head normal form), d.h. im Lambda-Kalkül eine Abstraktion.
- Genauer: Ausdruck ist eine FWHNF:
  FWHNF = Abstraktion
  (functional weak head normal form)

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften (2)

Weitere Notationen:

$\xrightarrow{no,+}$ = transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
(mehrere $\xrightarrow{no}$ nacheinander)

$\xrightarrow{no,*}$ = reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
(keines oder mehrere $\xrightarrow{no}$ nacheinander)

Definition

Ein Ausdruck s konvergiert ($s\Downarrow$) gdw. $\exists$FWHNF $v : s \xrightarrow{no,*} v$.
Andernfalls divergiert s, Notation $s\Uparrow$

Anmerkungen

- (pures) Haskell verwendet den call-by-name Lambda-Kalkül als semantische Grundlage
  (man braucht noch Erweiterungen . . .)
- Implementierungen verwenden call-by-need Variante:
  Vermeidung von Doppelauswertungen (kommt später)
- Call-by-name und call-by-need sind äquivalent (exakte Def kommt noch).
- Call-by-name (und auch call-by-need) sind optimal bzgl. Konvergenz:

Aussage (Standardisierung)

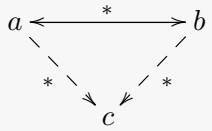
Sei s ein Lambda-Ausdruck. Wenn s mit beliebigen β-Reduktionen (an beliebigen Positionen) in eine Abstraktion v überführt werden kann, dann gilt $s\Downarrow$.

Church-Rosser Theorem

Für den Lambda-Kalkül gilt (unter der Gleichheit $=_\alpha$)

Satz (Konfluenz)

Church-Rosser Eigenschaft:
Wenn $a \xleftrightarrow{*} b$, dann existiert c, so dass $a \xrightarrow{*} c$ und $b \xrightarrow{*} c$



Hierbei bedeutet:
$\xrightarrow{*}$ beliebige Folge von β-Reduktionen (in bel. Kontext), und
$\xleftrightarrow{*}$ beliebige Folge von β-Reduktionen (vorwärts und rückwärts)
(in bel. Kontext)

Anwendungsordnung

- Sprechweisen: Anwendungsordnung, **call-by-value (CBV)**, **strikt**
- Grobe Umschreibung: Argumentauswertung vor Definitionseinsetzung

Call-by-value Beta-Reduktion

(β_{cbv}) $\quad (\lambda x.s)\ v \to s[v/x]$, wobei v Abstraktion oder Variable

Definition

CBV-Reduktionskontexte $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{E}\ \mathbf{Expr}) \mid ((\lambda V.\mathbf{Expr})\ \mathbf{E})$$

Wenn $s \xrightarrow{\beta_{cbv}} t$,
dann ist $E[s] \xrightarrow{ao} E[t]$ eine Anwendungsordnungsreduktion

CBV-Redexsuche mit Markierungsalgorithmus

- Starte mit $s^\star$
- Wende die Regeln an solange es geht:
  - $(s_1\ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star\ s_2)$
  - $(v^\star\ s) \Rightarrow (v\ s^\star)$
    falls v eine Abstraktion und
    s keine Abstraktion oder Variable
- Beispiel: $((((\lambda x.x)\ (((\lambda y.y)\ v)\ (\lambda z.z)))\ u)\ (\lambda w.w))^\star$

Falls danach gilt: $C[(\lambda x.s)^\star\ v]$ dann

$$C[(\lambda x.s)^\star v] \xrightarrow{ao} C[s[v/x]]$$

Beispiel

$$\begin{array}{ll}
 & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u))^\star \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z)))^\star(\lambda u.u)) \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)^\star((\lambda w.w)(\lambda z.z)))(\lambda u.u)) \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)(\lambda z.z))^\star)(\lambda u.u)) \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)((\lambda w.w)^\star(\lambda z.z)))(\lambda u.u)) \\
 & \\
\xrightarrow{ao} & (((\lambda x.\lambda y.x)(\lambda z.z))(\lambda u.u))^\star \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)(\lambda z.z))^\star(\lambda u.u)) \\
\Rightarrow & (((\lambda x.\lambda y.x)^\star(\lambda z.z))(\lambda u.u)) \\
 & \\
\xrightarrow{ao} & ((\lambda y.\lambda z.z)(\lambda u.u))^\star \\
\Rightarrow & ((\lambda y.\lambda z.z)^\star(\lambda u.u)) \\
 & \\
\xrightarrow{ao} & (\lambda z.z)
\end{array}$$

Eigenschaften

- Auch die call-by-value Reduktion ist deterministisch.

Definition

Ein Ausdruck s call-by-value konvergiert ($s \Downarrow_{ao}$), gdw.
$\exists$ FWHNF $v : s \xrightarrow{ao,*} v$.
Ansonsten (call-by-value) divergiert s, Notation: $s \Uparrow_{ao}$.

- Es gilt: $s \Downarrow_{ao} \implies s \Downarrow$.
- Die Umkehrung gilt nicht!

Eigenschaften

Vorteile der Anwendungsordnung (call-by-value):

- TIw. besseres Platzverhalten
- Auswertungsreihenfolge liegt fest
  (im Syntaxbaum von Funktionen f); bzw. ist innerhalb jeder Funktionsdefinition vorhersagbar.
  Bei AO: $f\ s_1\ s_2\ s_3$: immer zuerst s_1, dann s_2, dann s_3, dann $(f\ s_1\ s_2\ s_3)$
  Bei NO: zum Beispiel: zuerst s_1, dann evtl. abhängig vom Wert von s_1:
  zuerst s_2, dann s_3, oder andersrum,
  oder evtl. weder s_2 noch s_3.
  Dazwischen auch Auswertung von Anteilen von $(f\ s_1\ s_2\ s_3)$.
- Wegen der vorhersagbaren Auswertungsreihenfolge (in Funktionsdefinitionen) unter AO: Seiteneffekte können unter AO direkt eingebaut werden

In Haskell: seq

In Haskell: (Lokale) strikte Auswertung kann mit seq erzwungen werden.

$$\begin{array}{ll} \mathsf{seq}\ a\ b = b & \text{falls } a \Downarrow \\ (\mathsf{seq}\ a\ b) \Uparrow & \text{falls } a \Uparrow \end{array}$$

- in Anwendungsordung ist seq kodierbar, aber unnötig
- in Normalordnung:
  seq kann nicht im Lambda-Kalkül kodiert werden!
  seq kann auch nicht in erweiterten Kernsprachen kodiert werden!
  seq muss also explizit in der Sprache eingebaut werden.

Beispiel zu seq in Haskell

```
fak 0 = 1
fak x = x * fak(x-1)
```

Auswertung von `fak n`:

```
     fak n
 →   n * fak (n-1)
 →   n * ((n-1) * fak (n-2))
 →   ...
 →   n * ((n-1) * ((n-2) * .... * (2 * 1)))
 →   n * ((n-1) * ((n-2) * .... * 2))
 →   ...
```

Problem: Linearer Platzbedarf

Beispiel zu seq (2)

Version mit seq:

```
fak' x    = fak'' x 1

fak'' 0 y = y
fak'' x y = let m = x*y in seq m (fak'' (x-1) m)
```

Auswertung in etwa:

```
     fak' 5
 →   fak'' 5 1
 →   let m=5*1 in seq m (fak'' (5-1) m)
 →   let m=5 in seq m (fak'' (5-1) m)
 →   (fak'' (5-1) 5)
 →   (fak'' 4 5)
 →   let m = 4*5 in seq m (fak'' (4-1) m)
 →   let m = 20 in seq m (fak'' (4-1) m)
 →   (fak'' (4-1) 20)
 →    ...
```

Jetzt: konstanter Platzbedarf, da Zwischenprodukt `m` berechnet wird (erzwungen durch seq) und sharing mittels `let`.

Beispiele

- $\Omega := (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$.
- $\Omega \xrightarrow{no} \Omega$. Daraus folgt: $\Omega \Uparrow$
- $\Omega \xrightarrow{ao} \Omega$. Daraus folgt: $\Omega \Uparrow_{ao}$.
- $t := ((\lambda x.(\lambda y.y))\ \Omega)$.
- $t \xrightarrow{no} \lambda y.y$, d.h. $t \Downarrow$.
- $t \xrightarrow{ao} t$, also $t \Uparrow_{ao}$ denn die Anwendungsordnung muss zunächst das Argument Ω auswerten.

Hinweise zur verzögerten Auswertung

- Sprechweisen: Verzögerte Auswertung, **call-by-need**, **nicht-strikt**, **lazy**, (Reduktion mit Sharing)
- Optimierung der Normalordnungsreduktion

Verzögerte Auswertung kann durch Erweiterung des Lambda-Kalküls mit `let` modelliert werden:
Call-by-need Lambda-Kalkül mit `let`– Syntax:

$$\mathbf{Expr} ::= V \mid \lambda V.\mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}\ \mathbf{Expr}) \mid \texttt{let}\ V = \mathbf{Expr}\ \texttt{in}\ \mathbf{Expr}$$

- Zur Modellierung des sharing (von call-by-need) reicht die einfachere Variante eines nicht-rekursiven `let`:
in `let` $x = s$ `in` t muss gelten $x \notin FV(s)$ (siehe Skript)
- Aber: Haskell verwendet rekursives `let`!

Einschub: Programmieren mit `let` in Haskell

- `let` in Haskell ist viel allgemeiner als das einfache nicht-rekursive `let`.
- Haskells `let` für lokale Funktionsdefinitionen:

$$\begin{array}{ll} \texttt{let} & f_1\ x_{1,1}\ \ldots\ x_{1,n_1} = e_1 \\ & f_2\ x_{2,1}\ \ldots\ x_{2,n_2} = e_2 \\ & \ldots \\ & f_m\ x_{m,1}\ \ldots\ x_{m,n_m} = e_m \\ \texttt{in} & \ldots \end{array}$$

Definiert die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$

Beispiel:

```
f x y =  let quadrat z = z*z
         in quadrat x + quadrat y
```


Rekursives `let` in Haskell

Verschränkt-rekursives `let` erlaubt:

```
quadratfakultaet x =
   let quadrat z = z*z
       fakq    0 = 1
       fakq    x = (quadrat x)*fakq (x-1)
   in fakq x
```

Sharing von Ausdrücken mittels `let`:

```
verdopplefak x =
 let fak 0  = 1
     fak x  = x*fak (x-1)
     fakx   = fak x
 in fakx + fakx
```

```
verdopplefakLangsam x =
  let fak 0  = 1
      fak x  = x*fak (x-1)
  in fak x + fak x
```

`verdopplefak 100` berechnet nur einmal `fak 100`, im Gegensatz zu `verdopplefakLangsam`.

Pattern-Matching mit `let`

Links in einer `let`-Bindung in Haskell darf auch ein Pattern stehen.

Beispiel: $\sum_{i=1}^{n} i$ und $\prod_{i=1}^{n} i$ in einer rekursiven Funktion:

```
sumprod 1 = (1,1)
sumprod n =  let (s',p') = sumprod (n-1)
             in (s'+n,p'*n)
```

Das Paar aus dem rekursiven Aufruf wird mit Pattern Matching am let zerlegt!

Memoization

Beispiel: Fibonacci-Zahl

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib i = fib (i-1) + fib (i-2)
```

sehr schlechte Laufzeit!

n	gemessene Zeit im ghci für `fib` n
30	9.75sec
31	15.71sec
32	25.30sec
33	41.47sec
34	66.82sec
35	108.16sec

Memoization (2)

Besser:

```
-- Fibonacci mit Memoization
fibM i =
   let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
   in fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
```

n	gemessene Zeit im ghci für `fibM` n
1000	0.05sec
10000	1.56sec
20000	7.38sec
30000	23.29sec

Bei mehreren Aufrufen, noch besser:

```
fibM'  =
   let fibs = [0,1] ++ [fibs!!(i-1) + fibs!!(i-2) | i <- [2..]]
   in \i -> fibs!!i -- i-tes Element der Liste fibs
```


where-Ausdrücke (1)

`where`-Ausdrücke sind ähnlich zu `let`.

Z.B.

```
sumprod' 1 = (1,1)
sumprod' n = (s'+n,p'*n)
  where (s',p') = sumprod' (n-1)
```

where-Ausdrücke (2)

Beachte: (`let ... in` e) ist ein Ausdruck, aber e `where...` nicht

`where` kann man um Guards herum schreiben (`let` nicht):

```
f x
  | x == 0     = a
  | x == 1     = a*a
  | otherwise = a*f (x-1)
 where a = 10
```

Dafür geht

```
f x = \y -> mul
   where mul = x * y
```

nicht! (da `y` nicht bekannt in der `where`-Deklaration)

Gleichheit

Kalküle bisher:

- Call-by-Name Lambda-Kalkül: Ausdrücke, $\xrightarrow{no}$, $\Downarrow$
- Call-by-Value Lambda-Kalkül: Ausdrücke, $\xrightarrow{ao}$, $\Downarrow_{ao}$
- (Call-by-Need Lambda-Kalkül ...)

D.h. Syntax + Operationale Semantik.

Es fehlt:

- Begriff: Wann sind zwei Ausdrücke gleich(wertig)?
- D.h. insbesondere: Wann darf ein Compiler einen Ausdruck durch einen anderen ersetzen?

Gleichheit (2)

- Leibnizsches Prinzip: Zwei Dinge sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, bzgl. aller Eigenschaften.
- Für Programm-Kalküle: Zwei Ausdrücke s, t sind gleich, wenn man sie nicht unterscheiden kann, egal in welchem Kontext man sie benutzt.
- Formaler: s,t sind gleich, wenn für alle Kontexte C gilt:
  $C[s]$ und $C[t]$ verhalten sich gleich.
- **Verhalten** muss noch definiert werden. Für deterministische Sprachen reicht die Beobachtung der Terminierung (Konvergenz)
  (ergibt das gleiche wie Reduktion auf gleiche "Werte").

Gleichheit (3)

Kontextuelle Approximation und Gleichheit

Call-by-Name Lambda-Kalkül:

- $s \leq_c t$ gdw. $\forall C : C[s] \Downarrow \implies C[t] \Downarrow$
- $s \sim_c t$ gdw. $s \leq_c t$ und $t \leq_c s$

Call-by-Value Lambda-Kalkül:

- $s \leq_{c,ao} t$ gdw. $\forall C$: Wenn $C[s], C[t]$ geschlossen sind und $C[s] \Downarrow_{ao}$, dann auch $C[t] \Downarrow_{ao}$.
- $s \sim_{c,ao} t$ gdw. $s \leq_{c,ao} t$ und $t \leq_{c,ao} s$

Gleichheit (4)

- $\sim_c$ und $\sim_{ao}$ sind Kongruenzen
- Kongruenz $=$ Äquivalenzrelation $+$ kompatibel mit Kontexten, d.h. $s \sim t \implies C[s] \sim C[t]$.
- Gleichheit beweisen i.a. schwer, widerlegen i.a. einfach.

Anmerkung zu „$C[s], C[t]$ geschlossen“ bei $\sim$

- $\sim_c$ ändert sich nicht beim Übergang auf $C[s], C[t]$ geschlossen, aber $\sim_{c,ao}$.
- $\sim_{c,ao}$ wird auch in erweiterten Kalkülen so definiert, und:
- $\sim_{c,ao}$ hat unter der closed-Bedingung mehr sinnvolle Gleichheiten als ohne diese Bedingung (in den erweiterten Kalkülen)

Gleichheit (5)

Beispiele für Gleichheiten, Ungleichheiten, Implikation von Relationen:

- $(\lambda x, y.x)(\lambda z.z) \sim_c \lambda y.(\lambda z.z)$, Allgemeiner:
- $(\beta) \subseteq \sim_c$
- $(\beta_{cbv}) \subseteq \sim_{c,ao}$ aber $(\beta) \not\subseteq \sim_{c,ao}$
- $\sim_c \not\subseteq \sim_{c,ao}$ und $\sim_{c,ao} \not\subseteq \sim_c$