Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung

Modallogik

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

SoSe 2024

Stand der Folien: 25. Juni 2024

Modallogik (aussagenlogisch)

Zur Formulierung und Repräsentation von Aussagen,
die über die Aussagenlogik hinausgehen.
Meist „modale“ Einschränkung.

„Bald wird es regnen“
„Möglicherweise ist die Erde eine Kugel“ .
„Ich weiß, dass es niemand gibt, der alles weiß “ .
„Es ist verboten, bei roter Ampel über die Kreuzung zu fahren “

(Es gibt auch modallogische Erweiterungen der Prädikatenlogik.)

Modallogik (aussagenlogisch)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einfachste Variante:

Aussagenlogik und extra Operatoren $\Box, \Diamond$ (Box, Diamond) auf Formeln:

$\Box$	$\Diamond$	
„$\forall$ “ Immer gilt: Es ist notwendigerweise: Es ist geboten:	„$\exists$ “ Irgendwann gilt: Es ist möglich: Es ist erlaubt:	 (temporal) (modal) (deontic)

Erweiterungen

- Simultan mehrere (auch parametrisierte) Operatoren $\Box_A, \Box_B, \Diamond_C$: A glaubt ..., B glaubt ..., C hält für möglich ...
- Prädikatenlogik mit Modaloperatoren

Logikformalismen: Beispiele und Motivation

philosophische Logik

untersucht u.a. Modallogik und Varianten

Fragestellung der philosophischen Logik:

Welche Repräsentation?
Welche Ableitungsverfahren?
  Sind diese "richtig"?
  Für welche Zwecke/Fragestellungen?

Z.B. „wenn es nicht regnet, dann Radfahren möglich."
„Wenn Aussage T beweisbar ist, dann ist sie auch gültig."

(„nichtmonotone" Logik gibt es auch, betrachten wir hier nicht)

Diskrete Zeit

Operatoren: „vorher“, „nachher“, „immer“, „manchmal“ usw.

$\Box F$: F gilt immer in der Zukunft

$\Diamond F$: F gilt irgendwann in der Zukunft.

In dieser Modellierung sollte gelten:

$$\Box\Box F \iff \Box F$$

lineare Zeit: deterministische Prozesse

Dann gilt: $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

verzweigende Zeit: nicht-deterministische Prozesse:

gilt nicht mehr: $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

Bemerkungen zu CTL*, CTL, LTL

Logik CTL* (computation tree logic):
ist Verallgemeinerung einer Modallogik zu verzweigender Zeit mit Anwendung in Hardwareverifikation.
Spezialisierung: LTL: linear time logic.

Modallogik	CTL
Welten	Welten (Zustände)
Erreichbarkeit (nächste Welt)	Erreichbarkeits-Pfade
	Es gibt keine Endwelt

Logik des Erlaubten und Verbotenen (Normative Logik, Deontic Logic)

Aus Wikipedia: „Deontische Logik ist der Bereich der Logik, der die logischen Verhältnisse von Begriffen, die sich auf das Sollen beziehen, untersucht. Begriffe, die sich auf das Sollen beziehen, sind Gebot, Verbot, Erlaubnis und andere mehr.“

$\Box F$: F ist geboten; F muss gelten; bzw. F ist obligatorisch.
$\Diamond F$: F ist erlaubt.

In dieser Logik sollte gelten, dass obligatorisches auch erlaubt sein sollte. D.h. das Axiom:

$$\Box F \implies \Diamond F$$

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

$\Box F$: F ist bekannt.
$\Diamond F$: F ist glaubhaft.

bekannte Fakten sind richtig: D.h.

$$\Box F \implies F$$

ist ein extra Axiom dieser Logikvariante

Dieses Axiom ist falsch in einer Zeitlogik mit
$\Box$ = im nächsten Zustand

Beispiel: Mathematische Aussagen bzw. Sätze zu den natürlichen Zahlen.

$\Box F$: F ist beweisbar
$\Diamond F$: F ist gültig.

Bewiesene Fakten sind richtig: D.h. $\Box F \implies \Diamond F$
ist ein extra Axiom dieser Logikvariante

Die umgekehrte Aussage ist falsch:

$$\Diamond F \implies \Box F$$

da nicht alle gültigen Sätze zu $\mathbb{N}$ bewiesen werden können.

Variante einer Logik des Wissens (autoepistemische Logik)

Glauben an gewisse Fakten.

$\Box F$: F wird geglaubt.

$\Diamond F$: F ist möglich ($\neg F$ wird nicht geglaubt).

Die Axiome dazu:

$\Box(F \implies G)$	$\implies$	$(\Box F \implies \Box G)$	(Axiom K)
$\Box F$	$\implies$	$\Box\Box F$	positive Introspektion
$\neg\Box F$	$\implies$	$\Box(\neg\Box F)$	negative Introspektion

Parametrisierte Modaloperatoren

parametrisierte Modaloperatoren in einer Logik des Wissens mit mehreren Akteuren:

Akteure und Formeln sind getrennt.

$\boxed{\text{A}}\ F$	A weiß, dass F gilt
$\boxed{\text{A}}\ (\neg \boxed{\text{B}}\ F)$	A weiß, dass B nicht weiß, dass F wahr ist.

Zusätze:

- Formeln die immer gelten (unabhängig von Akteuren)
- extra Axiome

Eine Kripke-Semantik dazu ist möglich; mit Erweiterung um Akteure.

Parametrisierte Modaloperatoren

Extremfall: *dynamische Logik* zur Programmverifikation.
Es gibt zwei syntaktische Klassen:

- Programme (auch nichtterminierende, und nicht-deterministische)
- Formeln Eigenschaft des "Speicherinhalts"

$\boxed{\mathsf{P}}F$:	nach (jeder) Ausführung des Programms P gilt, falls das Programm terminiert, die Formel F.
$\wedge, \vee, \neg, \implies$	Logische Operatoren…

Es gibt sehr gut ausgearbeitete (theoretische) Arbeiten in diesem Bereich

Syntax

Semantik

Tautologien

Folgerungen

Syntax der aussagenlogischen Modallogik

Syntax: wie Aussagenlogik
Und zwei einstellige Modal-Operatoren $\Box$ und $\Diamond$;

Zur Grammatik kommt hinzu:

$$F ::= \Box F \mid \Diamond F \qquad \text{(auch geschachtelt)}$$

Beispiel $\Box((\Diamond X) \vee Y)$

Achtung: $\Box$ und $\Diamond$ sind nicht wahrheitsfunktional in der Modalen Aussagenlogik.
D.h. es gibt keine Wahrheitstafel für $\Box$ und $\Diamond$.

(Bedeutung s.u.)

Kripke-Semantik

(benannt nach Saul Aaron Kripke, (US-Logiker und Philosoph))

Kripke Axiom K: $\Box(A \implies B) \implies (\Box A \implies \Box B)$.

- Das Kripke Axiom ist nicht direkt intuitiv.
- Aber es ist vernünftig, da dann eine leicht verständliche Semantik funktioniert.
- Wenn man den Begriff der möglichen Welten akzeptert und nutzt, dann ist es leicht zu verstehen.
- Verwirft man das Kripke-Axiom (Nicht-Kripke-Modal-Logiken), dann ist man auf syntaktische Herleitungsmethoden angewiesen.

Es gilt: Wenn das (Kripke-) Axiom K gilt,
bzw. wenn man es annimmt, dann
kann man die Herleitbarkeit
auch mittels Modellen charakterisieren

Kripke-Semantik, aussagenlogisch

Modallogische Semantik: Basis ist eine strukturierte Menge von aussagenlogischen Interpretationen.

mögliche Welten (Interpretationen)	Menge W
Erreichbarkeitsrelation	R: binäre Relation auf W
Kripke-Rahmen (Kripke-Frame)	Paar (W, R)
Kripke-Struktur	Tripel (W, R, I)
aussagenlogische Interpretation(en):	$I(w)$ für jede Welt $w \in W$

Vor-Kripke Modallogik

Modallogik vor Kripke, D.h. vor ca 1960:
Modallogik wurde formal untersucht:

Regeln zu Herleitungen und Konsequenzen.

Wesentlich waren: die Menge der Tautologien,
und der Zusammenhang mit den verschiedenen Herleitungsregeln.

Die Kripke-Semantik erlaubt es, fast alle Varianten zu verstehen und zu ordnen.

Vor-Kripke Modallogik

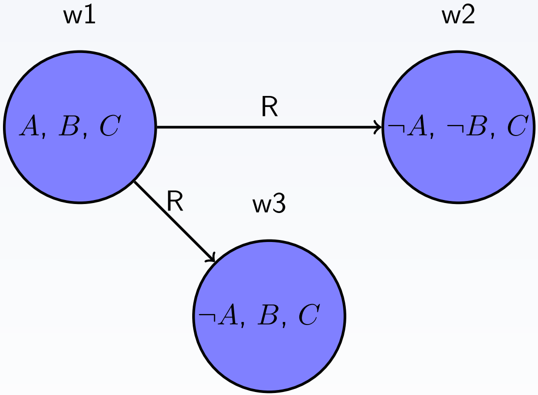
Modallogik vor Kripke, D.h. vor ca 1960:
Modallogik wurde formal untersucht:
Regeln zu Herleitungen und Konsequenzen.

Wesentlich waren: die Menge der Tautologien,
und der Zusammenhang mit den verschiedenen Herleitungsregeln.

Die Kripke-Semantik erlaubt es, fast alle Varianten zu verstehen und zu ordnen.

Vorsicht: Es gibt (exotische) Modallogiken, in den das Kripke-Axiom K nicht gilt, d.h. es gibt keine Kripke Semantik dazu.
(werden in der Vorlesung nicht behandelt)

Kripke-Struktur erstes Beispiel



$A, B, C, \ldots$ aussagenlogische Variablen; blaue Kugel: Interpretation

Bei fester Kripke-Struktur (W, R, I):
definiert man $\models$ bzgl dieser Kripke-Struktur. (eigentlich $\models_K$)
Sei $w \in W$

$$
\begin{array}{lll}
w \models 1 & & \\
w \not\models 0 & & \\
w \models A & \text{gdw.} & I(w)(A) \text{ für die Variable } A \\
w \models F \vee G & \text{gdw.} & w \models F \text{ oder } w \models G \\
w \models F \wedge G & \text{gdw.} & w \models F \text{ und } w \models G \\
w \models F \implies G & \text{gdw.} & \text{nicht } (w \models F) \text{ oder } w \models G \\
w \models \neg F & \text{gdw.} & \text{nicht } w \models F \\
w \models \Box F & \text{gdw.} & \forall w' : w\ R\ w' \implies w' \models F \\
w \models \Diamond F & \text{gdw.} & \exists w' : w\ R\ w' \wedge w' \models F
\end{array}
$$

Gültigkeit einer Formel

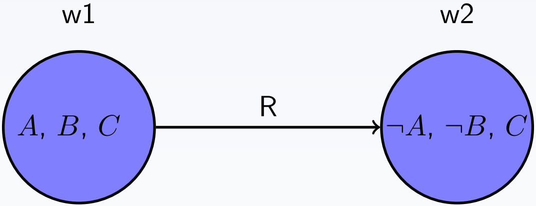
F gültig in $K = (W, R, I)$, falls für alle $w \in W$: $w \models F$.
Notation: $K \models F$.

F *Tautologie*, falls für alle $K = (W, R, I)$: $K \models F$.

F *erfüllbar*, falls es ein $K = (W, R, I)$ gibt mit: $K \models F$.

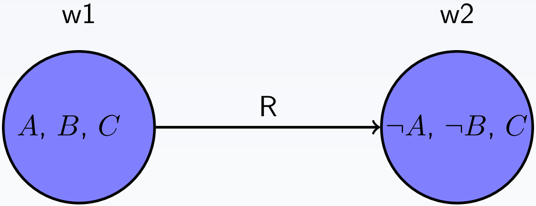
F *gültig im Kripke-Rahmen* (W, R), falls für alle I gilt: $(W, R, I) \models F$.

Kripke-Struktur Beispiel



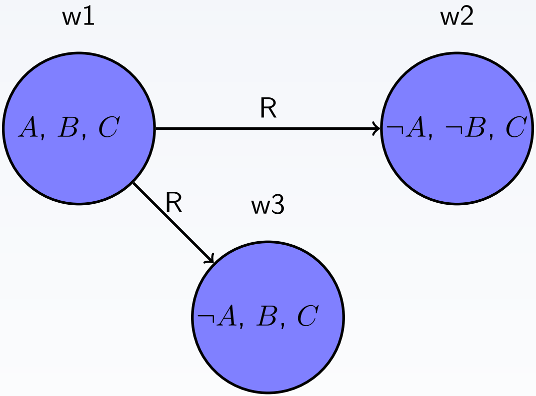
Formel	w1	w2
A	1	0
$\Box A$	0	1
$\Diamond A$	0	0
$\Diamond C$	1	0

Kripke-Struktur Beispiel



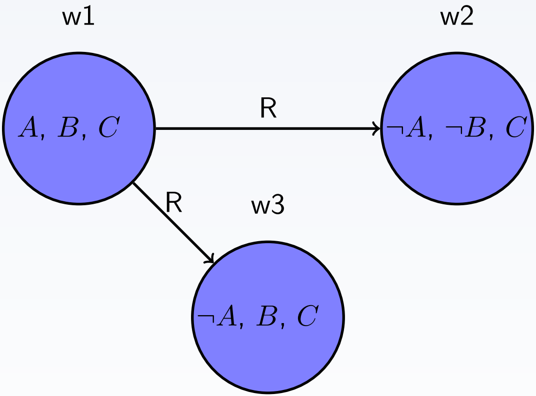
Formel	w1	w2
A	1	0
$\Box A$	0	1
$\Diamond A$	0	0
$\Diamond C$	1	0

Formel	w1	w2
$A \implies \Box A$	0	1
$C \implies \Box C$	1	1
$\Box\Box A$	1	1
$\Box 0$	0	1



Formel	w1	w2	w3
A	1	0	0
$\Box A$	0	1	1
$\Box C$	1	1	1
$\Diamond B$	1	0	0

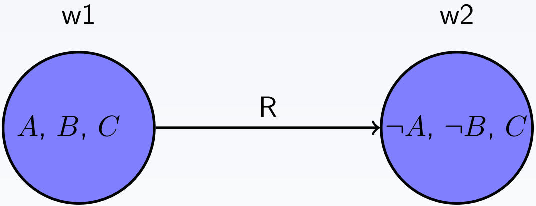
Kripke-Struktur Beispiel



Formel	w1	w2	w3
A	1	0	0
$\Box A$	0	1	1
$\Box C$	1	1	1
$\Diamond B$	1	0	0

Formel	w1	w2
$A \implies \Box A$	0	1
$C \implies \Box C$	1	1
$\Box\Box A$	1	1
$\Box 0$	0	1

Kripke-Struktur Beispiel



Formel	w1	w2
$\Box A \implies \Diamond B$		
$(A \wedge \Diamond \neg C) \implies B \vee \Box B$		

Semantische Folgerung, Deduktionstheorem

F ist **semantische Folgerung** (logische Konsequenz)
von $\{F_1, \ldots, F_n\}$,
falls für alle Kripke-Strukturen K gilt:

Wenn $K \models \{F_1, \ldots, F_n\}$, dann auch $K \models F$.

Notation: $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

F ist **semantische Folgerung** (logische Konsequenz)
von $\{F_1, \ldots, F_n\}$,
falls für alle Kripke-Strukturen K gilt:

Wenn $K \models \{F_1, \ldots, F_n\}$, dann auch $K \models F$.

Notation: $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$.

Beachte: Kriterium für $\models$ sind Kripke-Strukturen, nicht Welten.
Einschränkung: Nur Modallogiken mit Kripke-Semantik erlauben den Begriff $\models$

Deduktionstheorem in Modallogik

Es gibt (inhaltlich) verschiedene Formulierungen:

- $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$ ist äquivalent zu
  $F_1 \land \ldots \land F_n \implies F$ ist Tautologie.

  (Gilt nicht in der aussagenlogischen Modallogik, s.u.)
- $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash F$ ist äquivalent zu
  $F_1 \land \ldots \land F_n \implies F$ ist Tautologie.

  Welche Herleitungsrelation $\vdash$??.

Deduktionstheorem in Modallogik

In der Modallogik gilt das Deduktionstheorem **nicht**:

Es gilt: Wenn $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \implies F$ Tautologie,
dann gilt auch $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$

Aber Umkehrung ist falsch: (X: eine Aussagenlog. Variable)

$\Diamond X \models \Diamond\Diamond X$ gilt immer:
Sei K Kripke-Struktur mit $K \models \Diamond X$.
zu w_1 ex w_2 mit $w_2 \models X$ und zu w_2 ex w_3 mit $w_3 \models X$
Also: $K \models \Diamond\Diamond X$

$\Diamond X \implies \Diamond\Diamond X$ ist keine Tautologie
Gegenbeispiel K besteht aus genau zwei Welten w_1, w_2, mit $w_1 \; R \; w_2$, aber keine Relation R für w_2, wobei $w_1 \not\models X$, und $w_2 \models X$.
Dann gilt: $w_1 \models \Diamond X$, aber es gibt keine Welt, die von w_1 aus in zwei Schritten erreichbar ist. Also ist $\Diamond\Diamond X$ falsch in w_1.

Deduktionstheorem in Modallogik

Folgerung aus:

In der Modallogik gilt das Deduktionstheorem **nicht**!

- Man kann Schlussfolgerung nicht analog zur Aussagenlogik / Prädikatenlogik implementieren.
- D.h. nicht durch negieren des Theorems und Suche nach Widerspruch.

(kommt noch genauer. . .)

Beispiele für Aussagen

Lemma Wenn F eine Tautologie ist, dann ist auch $\Box F$ eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel in Modal-Logik: $\dfrac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)

Beispiele für Aussagen

Lemma Wenn F eine Tautologie ist, dann ist auch $\Box F$ eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel in Modal-Logik: $\dfrac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)

Aber: $F \implies \Box F$ ist i.a. keine Tautologie.
Z.B. $A \implies \Box A$ ist i.a. falsch.

Beispiele für Aussagen

- $\Box 0$ bzgl einer Welt w bedeutet, dass dieses w eine Sackgasse ist:
  von w aus ist keine Welt mehr erreichbar, denn in keiner Interpretation ist 0 wahr.

- Wenn $\Box\Box\Box 0$ in einer Welt w wahr ist, dann bedeutet das, dass man von w aus höchstens 2 R-Schritte machen kann.

- 1 , $\Box 1$ und $\Box \ldots \Box 1$ sind immer Tautologien

Beispiele für Aussagen

- $\Diamond 0$???
- Was gilt, wenn $(\Diamond 1) \wedge (\Box \Diamond 1)$ eine Tautologie ist?

Modallogik: Automatisierungen

- Es gibt einige automatische Deduktionssysteme für Modallogiken.
- Diese können Tautologien nachweisen;
  arbeiten analog zu Resolutionsbeweisern.
- Folgerungssysteme; D.h. Berechnen von $F \models G$;
  benötigen andere Methoden.
- Diese sind parametrisiert mit der benutzten Modallogik-Variante
  d.h. mit der Klasse der benutzten (erlaubten) Kripke-Strukturen.
  (siehe weiter unten).

Äquivalenzen und Nichtäquivalenzen

Alle aussagenlogischen Tautologien gelten und:

$$
\begin{array}{lcl}
\Box(F \land G) & \iff & \Box F \land \Box G \\
\Diamond(F \lor G) & \iff & \Diamond F \lor \Diamond G \\
\neg(\Box F) & \iff & \Diamond(\neg F) \\
\neg(\Diamond F) & \iff & \Box(\neg F) \\
\Box(F \implies G) & \implies & (\Box F \implies \Box G)
\end{array}
$$

Nicht äquivalent bzgl. aller Kripke-Strukturen (d.h. K) sind:

$$
\begin{array}{lcl}
\Diamond(F \land G) & \text{und} & \Diamond F \land \Diamond G \\
\Box(F \lor G) & \text{und} & \Box F \lor \Box G
\end{array}
$$

Prüfung von Tautologien ist nicht ausreichend! Also braucht man:

Modallogik: Folgerungssysteme

Prüfung von Tautologien ist nicht ausreichend! Also braucht man:

Folgerungssystem für normale Modallogiken

Gegeben $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, dann sind herleitbar:

1. Alle aus $\mathcal{F}$ aussagenlogisch herleitbaren Formeln.
2. Formeln, die durch Transformationen wie $\neg\Diamond F \iff \Box\neg F$ aus Formeln aus $\mathcal{F}$ entstehen.
3. Notwendigkeitseinführung: Wenn $F \in \mathcal{F}$, und F wurde nur aus Tautologien (genauer aus dem leeren Anfangs-$\mathcal{F}$) hergeleitet, dann kann man $\Box F$ herleiten.
4. (Axiom K): Wenn $\Box(F \implies G) \in \mathcal{F}$, dann kann man $(\Box F \implies \Box G)$ herleiten.
5. **Beweis durch Widerspruch**:
   Wenn man aus $\mathcal{F} \cup \{G\}$ einen Widerspruch herleiten kann, dann kann man $\neg G$ aus $\mathcal{F}$ herleiten.
   z.B. $\Diamond 0$ ist ein Widerspruch, da Negation der Tautologie $\Box 1$.

Fragen: korrekt?, vollständig? Komplexität?

Modallogik: Folgerungssysteme

Das obige Folgerungssystem erlaubt auch zu folgern

- Alle Tautologien der Modallogik K.
  (Der Nachweis ist nicht ganz einfach.)
- Zum Beispiel:
  $(\Box F) \land (\Box G) \iff \Box(F \land G)$
  und
  $\Box 1$.
- Widersprüche sind alle Negationen von Tautologien, z.B. auch:
  $\Diamond 0$ als Negation von $\Box 1$.

- Ist das Folgerungssystem vollständig für K?
  vermutlich ja.
- In der Variante für eine parametrisierte Modallogik jedenfalls reicht es aus, um z.B. die richtigen Folgerungen im Beispiel der drei Weisen zu ziehen.

- Folgerungssysteme für andere Varianten der Modallogik:
- Weitere bzw. andere Folgerungsregeln
- Benötigen andere Axiome statt K bzw. zusätzliche Axiome
- Hierzu gibt es viele Untersuchungen
- Frage: welche Modal-Logik passt zu welcher Anwendung?

Modallogik: Folgerungssysteme

- Folgerungssysteme für andere Varianten der Modallogik:
- Weitere bzw. andere Folgerungsregeln
- Benötigen andere Axiome statt K bzw. zusätzliche Axiome
- Hierzu gibt es viele Untersuchungen
- Frage: welche Modal-Logik passt zu welcher Anwendung?

Beispiel: Drei Weisen

Drei Weise sitzen sich gegenüber, so dass jeder den anderen von vorne sieht. Jedem wird ein roter oder blauer Punkt auf die Stirn gemalt. Mindestens einer der Punkte ist rot, was den Weisen bekannt ist. Jeder sieht die Stirn der anderen aber nicht seine eigene.
Nach einer Zeit des Überlegens sagt der erste Weise: „ Ich weiß nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat.“
Nach weiterem Überlegen sagt der zweite Weise: „ Ich weiß auch nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat.“
Kurz danach sagt der dritte Weise: „ Jetzt weiß ich, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat“.
Wie kommt er zu dem Schluss und welche Farbe ist es?

Beispiel: Drei Weisen

RA: „A hat roten Punkt“, RB: „B hat roten Punkt“,
RC: „C hat roten Punkt“.

Formeln, die das Wissen zu der Situation formulieren.

Z.B, Wenn RA gilt, dann wissen das B, C:

$$
\begin{array}{lcl}
RA \lor RB \lor RC & & \\
RA & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{B}}RA) \land (\boxed{\mathsf{C}}RA) \\
\neg RA & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{B}}\neg RA) \land (\boxed{\mathsf{C}}\neg RA) \\
RB & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}}RB) \land (\boxed{\mathsf{C}}RB) \\
\neg RB & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}}\neg RB) \land (\boxed{\mathsf{C}}\neg RB) \\
RC & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}}RC) \land (\boxed{\mathsf{B}}RC) \\
\neg RC & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}}\neg RC) \land (\boxed{\mathsf{B}}\neg RC)
\end{array}
$$

Beispiel: Drei Weisen

Aussagen

$$\neg\boxed{\text{A}}RA \quad \text{(A kennt die Farbe seines Punktes nicht.)}$$
$$\neg\boxed{\text{B}}RB \quad \text{(B kennt die Farbe seines Punktes nicht.)}$$

Ziel

RC

$$\boxed{\text{C}}RC \quad \text{(C kennt die Farbe seines Punktes)}$$

Drei Weisen Beispiel

- Es gibt verschiedene Formalisierungen und Begründungen
- Es zeigt mehrere Effekte/Ideen
  - Fallunterscheidung ist notwendig
  - Vorsicht bei Schlüssen der Art:
    - jetzt weiss B bzw. C folgendes:
      (da man dann zu anderen Welten argumentiert)
  - Man hat den Eindruck, dass man Allgemeinwissen und spezifisches Wissen unterscheiden muss.
    Das hängt aber von der spezifischen Kodierung ab.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{\text{C}}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\neg RB \land \neg RC$.

Aus dem Wissen: $\boxed{\text{A}}\neg RB$ und $\boxed{\text{A}}\neg RC$.

Da auch $(\boxed{\text{A}}(RA \lor RB \lor RC))$ gilt, folgt $\boxed{\text{A}}RA$,

(das K-Axiom anwenden): im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{A}}RA$.

Also gilt $RB \lor RC$.

Frage ist: was kann z.B. $\boxed{\text{B}}$ herleiten?

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{\text{C}}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$.
Aus dem Wissen: $\boxed{\text{A}}\neg RB$ und $\boxed{\text{A}}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{\text{A}}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{\text{A}}RA$,
(das K-Axiom anwenden): im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{A}}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Frage ist: was kann z.B. $\boxed{\text{B}}$ herleiten?
$\boxed{\text{B}}(RB \vee RC)$. (Mit Fallunterscheidung)
Das ist das gleiche wie $\boxed{\text{B}}(\neg RC \implies RB)$.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{\text{C}}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$.
Aus dem Wissen: $\boxed{\text{A}}\neg RB$ und $\boxed{\text{A}}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{\text{A}}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{\text{A}}RA$,
(das K-Axiom anwenden): im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{A}}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Frage ist: was kann z.B. $\boxed{\text{B}}$ herleiten?
$\boxed{\text{B}}(RB \vee RC)$. (Mit Fallunterscheidung)
Das ist das gleiche wie $\boxed{\text{B}}(\neg RC \implies RB)$.

Nächster Widerspruchsbeweis:
Angenommen $\neg RC$ gilt. Dann kann man herleiten: $\boxed{\text{B}}\neg RC$,
und damit $\boxed{\text{B}}RB$, im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{B}}RB$.
Also ist RC hergeleitet durch Widerspruch.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{\text{C}}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$.
Aus dem Wissen: $\boxed{\text{A}}\neg RB$ und $\boxed{\text{A}}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{\text{A}}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{\text{A}}RA$,
(das K-Axiom anwenden): im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{A}}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Frage ist: was kann z.B. $\boxed{\text{B}}$ herleiten?
$\boxed{\text{B}}(RB \vee RC)$. (Mit Fallunterscheidung)
Das ist das gleiche wie $\boxed{\text{B}}(\neg RC \implies RB)$.

Nächster Widerspruchsbeweis:
Angenommen $\neg RC$ gilt. Dann kann man herleiten: $\boxed{\text{B}}\neg RC$,
und damit $\boxed{\text{B}}RB$, im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{B}}RB$.
Also ist RC hergeleitet durch Widerspruch.

Damit gilt auch $\boxed{\text{C}}RC$.

Multi-Modallogik: Beispiel

Kalendereintrag 14.6.2021

Zwei natürliche Zahlen a, b, $2 \leq a \leq b$.

1. Susi und Paul kennen a, b nicht.
2. Susi kennt die Summe $a + b$
3. Paul kennt das Produkt $a * b$

Dann folgen (korrekte) Aussagen in dieser Reihenfolge:

1. Susi: „ich weiß nicht was a und b ist. “
2. Paul: „ich weiß nicht was a und b ist. “
3. Susi: „Aha, jetzt weiss ich was a und b ist. “
4. Paul: „Aha, jetzt weiss ich auch was a und b ist. “

Darstellung in Multi-Modallogik?

Multi-Modallogik: Beispiel

1. Susi und Paul kennen a, b nicht.
2. Susi kennt die Summe $a + b$
3. Paul kennt das Produkt $a * b$

Dann folgende Aussagen in dieser Reihenfolge:

1. $(\neg\boxed{\text{Susi}}a) \wedge \neg\boxed{\text{Susi}}b$
2. $(\neg\boxed{\text{Paul}}a) \wedge \neg\boxed{\text{Paul}}b$
3. $\boxed{\text{Susi}}((\neg\boxed{\text{Paul}}a) \wedge \neg\boxed{\text{Paul}}b)$
4. $\Longrightarrow\ \boxed{\text{Susi}}a \wedge \boxed{\text{Susi}}b$
5. $\boxed{\text{Paul}}((\neg\boxed{\text{Susi}}a) \wedge \neg\boxed{\text{Susi}}b)$ und $\boxed{\text{Paul}}(\boxed{\text{Susi}}a \wedge \boxed{\text{Susi}}b)$
6. $\Longrightarrow\ \boxed{\text{Paul}}a \wedge \boxed{\text{Paul}}b$

Was ist die Lösung für a, b?

Multi-Modallogik: Beispiel

1. Susi und Paul kennen a, b nicht.
2. Susi kennt die Summe $a + b$
3. Paul kennt das Produkt $a * b$

Dann folgende Aussagen in dieser Reihenfolge:

1. $(\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b$
2. $(\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b$
3. $\boxed{\text{Susi}} ((\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b)$
4. $\implies \boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b$
5. $\boxed{\text{Paul}} ((\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b)$ und
   $\boxed{\text{Paul}} (\boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b)$
6. $\implies \boxed{\text{Paul}} a \wedge \boxed{\text{Paul}} b$

Was ist die Lösung für a, b?

Susi: 7 und Paul: 12

Modallogik: Rahmen-Axiome

Charakterisierung einer Logik durch Rahmenaxiome:

Man definiert Modallogikvarianten mittels Eigenschaften der zulässigen Kripke-Rahmen.

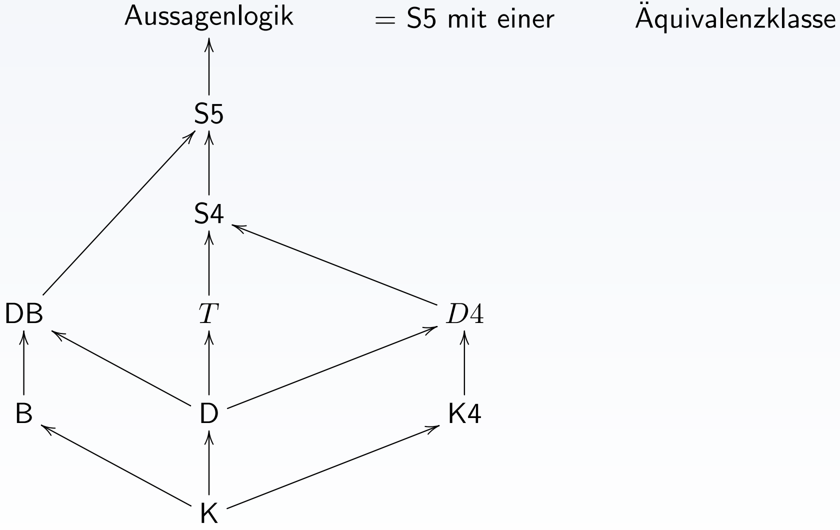
Meist sind das Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation.

Modallogik: Rahmen-Axiome

Name der Modallogik (des Axioms)	Eigenschaft der Relation im Rahmen (W, R)
K	R ist beliebig
T	R ist reflexiv
K4	R ist transitiv
S4	R ist reflexiv und transitiv
B	R ist reflexiv und symmetrisch
S5	R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch
5	R ist euklidisch
D	R ist seriell (unbeschränkt)
D4	R ist seriell und transitiv
S4.2	R ist reflexiv, transitiv und konfluent
Grz	R: jede unendliche R-Kette $w_1\ R\ w_2 \ldots$ hat nur endliche viele w_i.
Aussagenlogik	es gibt genau eine Welt w_0, und $w_0\ R\ w_0$ gilt

Relations-Eigenschaften

reflexiv	$\forall w : R(w,w)$
transitiv	$\forall w_1, w_2, w_3 : w_1\ R\ w_2 \wedge w_2\ R\ w_3 \implies w_1\ R\ w_3$
symmetrisch	$\forall w_1, w_2 : w_1\ R\ w_2 \implies w_2\ R\ w_1$
seriell	$\forall w \exists w' : w\ R\ w'$
euklidisch	$\forall w_1, w_2, w_3 : w_1\ R\ w_2 \wedge w_1\ R\ w_3 \implies (w_2\ R\ w_3)$
konfluent	(falls R reflexiv und transitiv) $\forall w_1, w_2, w_3 : (w_1\ R\ w_2 \wedge w_1\ R\ w_3)$ $\implies (\exists w_4 : w_2\ R\ w_4) \wedge w_3\ R\ w_4$



Die Pfeile symbolisieren Teilmenge der Tautologien der Logiken.

Axiomenschemata

Name (alt. N)	Formel (Rahmenaxiom)	Anwendung
K	$\Box(F \implies G) \implies (\Box F \implies \Box G)$	
T (M)	$\Box F \implies F$	epistemisch
D	$\Box F \implies \Diamond F$	deontisch
4	$\Box F \implies \Box\Box F$	Zeit; Wissen
B	$F \implies \Box\Diamond F$	
5 (E)	$\Diamond F \implies \Box\Diamond F$	Wissen
M (G)	$\Box\Diamond F \implies \Diamond\Box F$	
L (H, Lem0)	$\Box((A \wedge \Box A) \implies B) \vee$	
	$\Box((B \wedge \Box B) \implies A)$	
3 $(H, H_0^+$,Lem)	$\Box(\Box A \implies B) \vee \Box(\Box B \implies A)$	
2 (G)	$\Diamond\Box F \implies \Box\Diamond F$	
G (W)	$\Box(\Box F \implies F) \implies \Box F$	
Dum	$\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F)$	
	$\implies (\Diamond\Box F \implies \Box F)$	
Grz	$\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F) \implies F)$	

Axiomenschemata: Erläuterungen

epistemische und deontische Logiken

Name	Formel	Erklärung
T	$\Box F \implies F$	Was ich weiss, das gilt
D	$\Box F \implies \Diamond F$	
	$\Box F \implies \neg\Box\neg F$	Wenn ich F glaube, dann glaube ich das Gegenteil nicht
4	$\Box F \implies \Box\Box F$	Wenn ich F weiß, dann weiß ich dass ich F weiß (Positive Introspektion)
5	$\Diamond F \implies \Box\Diamond F$	
	$\neg\Box F \implies \Box\neg\Box F$	wenn ich F nicht weiß, dann weiß ich dass ich F nicht weiß. (Negative Introspektion)

(Axiome sind teilweise umgeformt)

Beispiel Axiom D

- Axiom D: $\Box F \implies \Diamond F$
- Da das immer gilt, d.h. in allen Welten, kann man folgern:
- Sei w eine Welt.
  Dann gilt D und $\Box 1 \implies \Diamond 1$
- In jeder Welt w gilt $\Box 1$,
  Und das Axiom, also auch $\Diamond 1$.
  Das bedeutet, es gibt einen Nachfolger der Welt w.
- Also: Jede Welt hat eine Nachfolge-Welt.

Es gilt auch die Umkehrung:

Wenn in der semantischen Struktur
jede Welt eine Nachfolge-Welt hat,
dann gilt der Satz: $\Box F \implies \Diamond F$

Mehr Forschung und Experimente in der Anwendung nötig :

- zum Zusammenhang von Anwendungen und Modallogik-Varianten.
- und zu Herleitungssystemen für Varianten von Modallogiken.