GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Logik in der Künstlichen Intelligenz (Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung)

Aussagenlogik

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

SoSe 2021

Stand der Folien: 12. April 2021

Überblick

Inhalt des Kapitels:

- Aussagenlogik allgemein
- Darstellung von Wissen in der Aussagenlogik
- Entscheidungs- und Deduktionsverfahren

KI-Ansatz der Verwendung einer Logik
basiert auf der **Wissenrepräsentationshypothese** (Brian Smith)

> *„Die Verarbeitung von Wissen lässt sich trennen in: Repräsentation von Wissen, wobei dieses Wissen eine Entsprechung in der realen Welt hat; und in einen Inferenzmechanismus, der Schlüsse daraus zieht."*

Wissenrepräsentations- und inferenzsysteme (1)

Allgemein:

- Programme bauen auf modellierten Fakten, Wissen, Beziehungen auf
- führen Operationen darauf durch, um neue Schlüsse zu ziehen

Wissenrepräsentations- und inferenzsysteme (2)

Komponenten und **Eigenschaften**:

- Formale Sprache zur Festlegung der Syntax (von Wissen und Regeln)
- Festlegung der Semantik (Bedeutung)
- Inferenzprozedur (operationale Semantik), z.B. Syntaktische Manipulation von Formeln
- Korrektheit: Inferenzprozedur erhält die Semantik
- Vollständigkeit: Inferenzprozedur findet alle notwendigen Folgerungen
- Nachweis der Korrektheit / Vollständigkeit: Untersuche Implementierung bzgl. der Semantik

Implementierung: Parser und Implementierung der Inferenzprozedur

Ausagenlogik: Anwendbarkeit

- Man hat nur endliche viele elementare Aussagen die wahr oder falsch sein können.
- Diese Aussagen haben keine Parameter / innere Struktur
- Logische Zusammenhänge sind bekannt zwischen den elementaren Aussagen.
- Alle Zusammenhänge sind im Prinzip mit UND, ODER, NICHT, IMPLZIERT formulierbar
- Schlüsse und Herleitungen auf den elementaren Aussagen. . .

Beispiel

"Der Himmel ist blau"
"ich muss mehr lernen"
"Es ist kalt"

Aber: der Text oder die "innere Bedeutung" kann nicht beim Schließen verwendet werden.

Syntax

Sei $\boldsymbol{X}$ ein Nichtterminal für aussagenlogische Variablen

Syntax aussagenlogischer Formeln

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} ::= \quad & \boldsymbol{X} \mid 0 \mid 1 \\ & \mid (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A}) \mid (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}) \mid (\neg \boldsymbol{A}) \\ & \mid (\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}) \mid (\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

Dabei entspricht

- $0 =$ falsche Aussage
- $1 =$ wahre Aussage

Eigentlich: 0 und 1 nicht nötig, man könnte auch $A \wedge \neg A$ und $A \vee \neg A$ stattdessen verwenden

Aussagenlogik, Notiz

Syntaktische Konventionen

Variablennamen sollten aussagekräftig gewählt werden.

- „Wenn es heute nicht regnet, werde ich Fahrradfahren“
- $\neg heuteRegnetEs \Rightarrow fahrradfahren$

Klammerregeln:

- Wir lassen Klammern oft weg
- Da $\vee, \wedge$ assoziativ:
  links- / rechts-Klammerung egal
- Priorität;: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$.

  $((A \iff B) \iff C)$
- Auch andere Operatoren werden manchmal verwendet:
  $\Leftarrow$, NAND, NOR, XOR

Sprechweisen

- $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ nennt man **Junktoren**
- Bezeichnung der einzelnen Junktoren:

$A \wedge B$:	**Konjunktion** (Verundung)
$A \vee B$:	**Disjunktion** (Veroderung)
$A \Rightarrow B$:	**Implikation** (Folgerung), (aus A folgt B)
$A \Leftrightarrow B$:	**Äquivalenz** (Biimplikation)
$\neg A$:	**negierte Formel** (Negation).

Sprechweisen (2)

Atom = Aussagenlogische Variable, 0, oder 1

Literal = Atom oder $\neg A$, wobei A ein Atom ist

Beispiele:

- X ist ein Atom
- X, $\neg X$ und 0 sind Literale
- $\neg(\neg X)$ ist weder Atom noch Literal (sondern Formel)

Semantik der Junktoren

Definiere f_{op} für jeden Junktor

- $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit
  $f_\neg(0) = 1$ und $f_\neg(1) = 0$
- Für $op \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \iff, \Leftarrow, NOR, NAND, XOR\}$:
  $f_{op} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ mit

a	b	$f_\wedge(a,b)$	$f_\vee(a,b)$	$f_\Rightarrow(a,b)$	$f_\Leftarrow(a,b)$	$f_{NOR}(a,b)$	$f_{NAND}(a,b)$	$f_\iff(a,b)$	$f_{XOR}(a,b)$
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

Def. . .

Interpretation

Definition:
Eine **Interpretation** (Variablenbelegung) I ist eine Funktion:

$$I : \{\text{aussagenlogische Variablen}\} \to \{0, 1\}.$$

Fortsetzung von I auf Aussagen:

- $I(0) := 0, I(1) := 1$
- $I(\neg A) := f_\neg(I(A))$
- $I(A\ op\ B) := f_{op}(I(A), I(B))$, wobei $op \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\ \ldots\}$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z))$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$\begin{aligned} & I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\ = \quad & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \end{aligned}$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$\begin{array}{ll} & I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\ = & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\ = & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \end{array}$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$
\begin{array}{ll}
& I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(I(X), I(Z))), f_{\vee}(I(Y), f_{\neg}(I(Z))))
\end{array}
$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$
\begin{array}{ll}
 & I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(I(X), I(Z))), f_{\vee}(I(Y), f_{\neg}(I(Z)))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(0, 1)), f_{\vee}(1, f_{\neg}(1)))
\end{array}
$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$\begin{array}{rl} & I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\ = & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\ = & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \\ = & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(I(X), I(Z))), f_{\vee}(I(Y), f_{\neg}(I(Z)))) \\ = & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(0, 1)), f_{\vee}(1, f_{\neg}(1))) \\ = & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(1), f_{\vee}(1, 0)) \end{array}$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$
\begin{array}{rl}
& I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(I(X), I(Z))), f_{\vee}(I(Y), f_{\neg}(I(Z)))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(0, 1)), f_{\vee}(1, f_{\neg}(1))) \\
= & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(1), f_{\vee}(1, 0)) \\
= & f_{\Rightarrow}(0, 1)
\end{array}
$$

Beispiel

Sei I Interpretation mit: $I(X) = 0, I(Y) = 1, I(Z) = 1$

$$
\begin{aligned}
& I(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(I(\neg(X \Rightarrow Z)), I(Y \vee \neg Z)) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(I(X \Rightarrow Z)), f_{\vee}(I(Y), I(\neg Z))) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(I(X), I(Z))), f_{\vee}(I(Y), f_{\neg}(I(Z)))) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(f_{\Rightarrow}(0, 1)), f_{\vee}(1, f_{\neg}(1))) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(f_{\neg}(1), f_{\vee}(1, 0)) \\
= \quad & f_{\Rightarrow}(0, 1) \\
= \quad & 1
\end{aligned}
$$

Modell

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Definition

Eine Interpretation I ist genau dann ein **Modell** für die Aussage F, wenn $I(F) = 1$ gilt.

Wir schreiben in diesem Fall: $I \models F$

Alternative Sprechweisen:

- F gilt in I
- I macht F wahr

$\models$ Logik

$\vdash$ Algo.

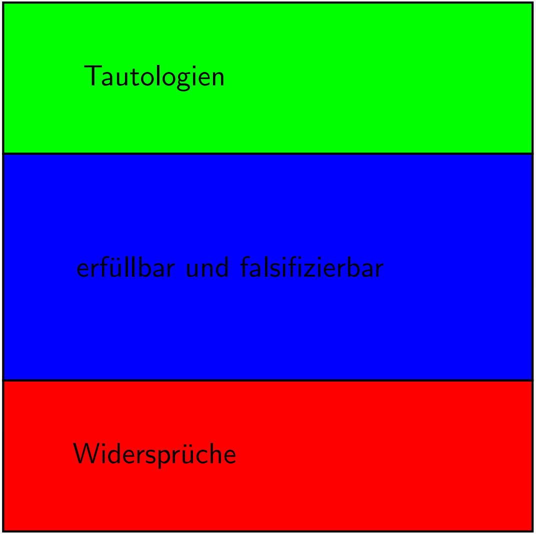
Eigenschaften von Formeln

Sei A ein Aussage.

- A ist eine **Tautologie** (Satz, allgemeingültig), gdw. für alle Interpretationen I gilt: $I \models A$.
- A ist ein **Widerspruch** (widersprüchlich, unerfüllbar), gdw. für alle Interpretationen I gilt: $I(A) = 0$.
- A ist **erfüllbar** (konsistent), gdw. eine Interpretation I existiert mit: $I(A) = 1$ bzw. $I \models A$
- A ist **falsifizierbar**, gdw. eine Interpretation I existiert mit $I(A) = 0$.

Aussagenlogik, Notiz

Eigenschaften von Formeln



$(x \vee \neg x)$ 1

erfüllbar

$(x \vee y)$ x

falsifizierbar

$\neg(x \vee \neg x)$ | 0

Beispiele (1)

$X \lor \neg X$

- ist eine Tautologie, denn für jede Interpretation I gilt: $I(X \lor \neg X) = f_\lor(f_\neg(I(X)), I(X)) = 1$, da $f_\neg(I(X))$ oder $I(X)$ gleich zu 1 sein muss.
- ist erfüllbar (jede Interpretation ist ein Modell)
- ist nicht falsifizierbar
- ist kein Widerspruch

Beispiele (2)

$X \wedge \neg X$

- ist ein Widerspruch, denn für jede Interpretation I gilt: $I(X \wedge \neg X) = f_\wedge(f_\wedge(I(X)), I(X)) = 0$, da $f_\neg(I(X))$ oder $I(X)$ gleich zu 0 sein muss.
- ist falsifizierbar (für jede Interpretation I gilt $I(X \wedge \neg X) = 0$)
- ist nicht erfüllbar
- ist keine Tautologie

Beispiele (3)

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$$

- ist eine Tautologie.
- ist erfüllbar
- ist nicht falsifizierbar
- ist kein Widerspruch

Beispiele (4)

1

$X \vee Y$

- ist erfüllbar. Z.B. ist I mit $I(X) = 1, I(Y) = 1$ ein Modell für $X \vee Y$: $I(X \vee Y) = f_\vee(I(X), I(Y)) = f_\vee(1, 1) = 1$.
- ist falsifizierbar, denn mit $I(X) = 0, I(Y) = 0$ gilt $I(X \vee Y) = 0$
- ist keine Tautologie
- ist kein Widerspruch

Beispiele (5)

„Abendrot Schlechtwetterbot'“

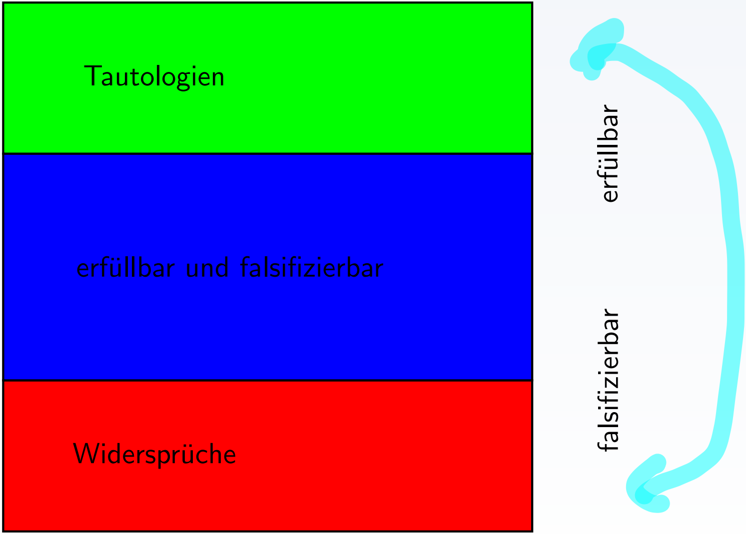
- Formel dazu: Abendrot $\Rightarrow$ Schlechtes_Wetter
- Erfüllbar und Falsifizierbar
- Weder Tautologie noch Widerspruch

Beispiele (6)

Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.

- Formel dazu:
  Hahn_kraeht_auf_Mist $\Rightarrow$
  (Wetteraenderung $\vee$ $\neg$Wetteraenderung)
- ist eine Tautologie
- ist erfüllbar
- ist weder widersprüchlich noch falsifizierbar

Eigenschaften von Formeln



Komplexitäten

Theorem: Aussagenlogik

- Es ist entscheidbar, ob eine Aussage eine Tautologie (Widerspruch, erfüllbar,falsifizierbar) ist.
  Einfachstes Verfahren: **Wahrheitstabelle**
- Die Frage „Ist A erfüllbar?“ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A falsifizierbar?“ ist ebenso $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A Tautologie?“ ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A ein Widerspruch?“ ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig.

Exkurs: Komplexitätsklassen (zur Erinnerung)

Problemklasse = Wortproblem über einer formalen Sprache

$$\text{SAT} := \{F \mid F \text{ ist erfüllbare aussagenlogische Formel }\}.$$

Wortproblem: Liegt eine gegebene Formel in der Sprache SAT ?

Antwort: Ja oder Nein

Exkurs: Komplexitätsklassen (2)

$\mathcal{NP} =$ Alle Sprachen, deren Wortproblem auf einer nichtdeterministischen Turingmaschine in polynomieller Zeit lösbar ist.

$Co\mathcal{NP} = \{L \mid L^C \in \mathcal{NP}\}$
wobei L^C das Komplement der Sprache L ist.

Offensichtlich: $L \in \mathcal{NP} \iff L^C \in Co\mathcal{NP}$

Beispiel: UNSAT $:= \{F \mid F$ ist Widerspruch$\}$

UNSAT $\in Co\mathcal{NP}$, denn:

UNSAT$^C =$ (Alle Formeln $\setminus$ UNSAT) $=$ SAT, und SAT $\in \mathcal{NP}$.

Exkurs: Komplexitätsklassen (3)

$L \in \mathcal{NP}$ ist $\mathcal{NP}$-**vollständig** gdw.:
für jede Sprache $L' \in \mathcal{NP}$ gibt es eine Polynomialzeit-Kodierung $R : L' \to L$ mit $x \in L'$ gdw. $R(x) \in L$

$L \in Co\mathcal{NP}$ ist $Co\mathcal{NP}$-**vollständig** gdw.:
für jede Sprache $L' \in Co\mathcal{NP}$ gibt es eine Polynomialzeit-Kodierung $R : L' \to L$ mit $x \in L'$ gdw. $R(x) \in L$

Exkurs: Komplexitätsklassen (4)

Theorem

L ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig gdw.: L^C ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Komplexitäten (nochmal)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Theorem

- Es ist entscheidbar, ob eine Aussage eine Tautologie (Widerspruch, erfüllbar,falsifizierbar) ist.
- Die Frage „Ist A erfüllbar?“ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A falsifizierbar?“ ist ebenso $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A Tautologie?“ ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig.
- Die Frage „Ist A ein Widerspruch?“ ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig.

Fazit

- Sequentielle Algorithmen zur Lösung beider Problemklassen: nur Exponential-Zeit Algorithmen bekannt (solange $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ unbekannt)
- $\mathcal{NP} \stackrel{?}{=} Co\mathcal{NP}$ unbekannt, allgemeine Vermutung: Nein
- Probleme aus $\mathcal{NP}$ kann man mit Glück (Raten) schnell lösen (Lösungen sind polynomiell verifizierbar)
- Probleme aus $Co\mathcal{NP}$ scheinen schwieriger als $\mathcal{NP}$-Probleme. z.B. Tautologie: man muss alle Interpretation durchprobieren

Folgerungsbegriffe

Unterscheide zwischen

- **Semantische Folgerung**
  definiert mittels der Semantik
- **Syntaktische Folgerung** (Herleitung, Ableitung)
  Verfahren mit einer prozeduralen Vorschrift, oft: nicht-deterministischer Kalkül.

Semantische Folgerung

- $\mathcal{F}$ eine Menge von (aussagenlogischen) Formeln
- G eine weitere Formel.

G **folgt semantisch** aus $\mathcal{F}$
gdw.
Für alle Interpretationen I:
wenn für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $I(F) = 1$, dann auch $I(G) = 1$.

Schreibweise: $\mathcal{F} \models G$

Einfache Resulate

Betrachte $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$

1. Wenn ein F_i widersprüchlich, dann kann man alles folgern:
   Es gilt dann für jede Formel G: $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
2. Wenn ein F_i eine Tautologie ist, dann kann man F_i weglassen:
   $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$ ist dasselbe wie
   $\{F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_n\} \models G$

Deduktionstheorem der Aussagenlogik

Deduktionstheorem

$\{F_1, \ldots, F_n\} \models G$ gdw. $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow G$ ist Tautologie.

Aussagen F, G nennt man **äquivalent** ($F \sim G$), gdw. $F \iff G$ eine Tautologie ist.

Beobachtungen:

- $F \sim G$ gdw. für alle I: $I \models F$ gdw. $I \models G$
- $X \wedge Y$ **nicht äquivalent** zu $X' \wedge Y'$ (Variablenbelegung spielen eine Rolle!)

Syntaktische Folgerung

- $\mathcal{A}$: (nichtdeterministischer) Algorithmus (Kalkül), der aus einer Menge von Formeln $\mathcal{H}$ eine neue Formel H berechnet
- H **folgt syntaktisch** aus $\mathcal{H}$
- Schreibweisen $\mathcal{H} \vdash_A H$ oder auch $\mathcal{H} \rightarrow_A H$

Definition

- Der Algorithmus $\mathcal{A}$ ist **korrekt** (sound), gdw. aus $\mathcal{H} \vdash_A H$ stets $\mathcal{H} \models H$ folgt.
- Der Algorithmus $\mathcal{A}$ ist **vollständig** (complete), gdw. $\mathcal{H} \models H$ impliziert, dass $\mathcal{H} \vdash_A H$

Korrekter & Vollständiger Algorithmus (naiv)

Gegeben: $\{F_1, \ldots, F_n\}$ und Tautologiechecker

Verfahren:

- Zähle alle Formeln F auf
- Prüfe ob $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \implies F$ Tautologie
- Wenn ja: $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$ (wegen Deduktionstheorem)

Problem:

Immer unendlich viele F, da alle Tautologien aus $\{F_1, \ldots, F_n\}$ folgen.

Es gilt: $\{F_1, \ldots, F_n\} \models G$ für alle Tautologien G

Methoden zur Tautologie-Erkennung

(auch Erfüllbarkeit)

- Wahrheitstabelle
- BDDs (binary decision diagrams): Aussagen als boolesche Funktionen, kompakte Darstellung
- Genetische Algorithmen (Erfüllbarkeit)
- Suchverfahren mit zufälliger Suche
- Davis-Putnam-Verfahren (später): Fallunterscheidung mit Simplifikationen
- Tableaukalkül (später): Syntaktische Analyse der Formeln

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$(x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x]$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$(x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x]$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$\begin{aligned} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x] \\ = \; & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge z)) \end{aligned}$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge z)) \end{array}$$

Verallgemeinerung: $A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ ist die parallele Ersetzung aller x_i durch B_i

Beispiel:

$$(x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x, (a \wedge b)/z]$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge z)) \end{array}$$

Verallgemeinerung: $A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ ist die parallele Ersetzung aller x_i durch B_i

Beispiel:

$$(x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x, (a \wedge b)/z]$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge z)) \end{array}$$

Verallgemeinerung: $A[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$ ist die parallele Ersetzung aller x_i durch B_i

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x, (a \wedge b)/z] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge (a \wedge b)) \end{array}$$

Substitution

Wir schreiben $A[B/x]$ für die Ersetzung aller Vorkommen von Variable x in Formel A durch Formel B

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge z)) \end{array}$$

Verallgemeinerung: $A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ ist die parallele Ersetzung aller x_i durch B_i

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & (x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x, (a \wedge b)/z] \\ = & ((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg((z \implies (w \wedge u)) \wedge (a \wedge b)) \end{array}$$

Nicht:

$$(x \vee y) \implies (\neg(x \wedge z))[(z \implies (w \wedge u))/x, (a \wedge b)/z] =$$
$$((z \implies (w \wedge u)) \vee y) \implies (\neg(((a \wedge b) \implies (w \wedge u)) \wedge (a \wedge b))$$

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1, \ldots, B_n$ weitere Aussagen, dann gilt auch $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] \ \sim \ A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

$x_1 \vee x_2 \sim x_2 \vee x_1$

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1, \ldots, B_n$ weitere Aussagen, dann gilt auch $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] \ \sim \ A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

Wahrheitstafel für A_1, A_2:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	A_1	A_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{j,1}$	$\ldots$	$c_{j,n}$	$c_{j,n+1}$	$\ldots$	$c_{j,m}$	d_j	d'_j
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1, \ldots, B_n$ weitere Aussagen, dann gilt auch $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] \ \sim \ A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

Wahrheitstafel für A_1, A_2:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	A_1	A_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{j,1}$	$\ldots$	$c_{j,n}$	$c_{j,n+1}$	$\ldots$	$c_{j,m}$	d_j	d'_j
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Da $A_1 \sim A_2$, muss gelten $d_j = d'_j$ für alle j

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1, \ldots, B_n$ weitere Aussagen, dann gilt auch $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] \ \sim \ A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

Wahrheitstafel für A_1, A_2:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	A_1	A_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{j,1}$	$\ldots$	$c_{j,n}$	$c_{j,n+1}$	$\ldots$	$c_{j,m}$	d_j	d'_j
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Da $A_1 \sim A_2$, muss gelten $d_j = d'_j$ für alle j

Wahrheitstafel für $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ und $A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	B_1	$\ldots$	B_n	$A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$	$A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{i,1}$	$\ldots$	$c_{i,n}$	$c_{i,n+1}$	$\ldots$	$c_{i,m}$	$b_{i,1}$	$\ldots$	$b_{i,n}$	d_i	d'_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Zeige $d_i = d'_i$:

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1, \dots, B_n$ weitere Aussagen, dann gilt auch $A_1[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n] \ \sim\ A_2[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \dots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

Wahrheitstafel für A_1, A_2:

x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_m	A_1	A_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_{j,1}$	$\dots$	$c_{j,n}$	$c_{j,n+1}$	$\dots$	$c_{j,m}$	d_j	d'_j
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Da $A_1 \sim A_2$, muss gelten $d_j = d'_j$ für alle j

Wahrheitstafel für $A_1[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$ und $A_2[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$:

x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_m	B_1	$\dots$	B_n	$A_1[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$	$A_2[B_1/x_1, \dots, B_n/x_n]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_{i,1}$	$\dots$	$c_{i,n}$	$c_{i,n+1}$	$\dots$	$c_{i,m}$	$b_{i,1}$	$\dots$	$b_{i,n}$	d_i	d'_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Zeige $d_i = d'_i$:

$$\begin{array}{lcl} d_i & = & A_1[b_{i,1}/x_1, \dots, b_{i,n}/x_n, c_{i,n+1}/x_{n+1}, \dots, c_{i,m}/x_m] \\ d'_i & = & A_2[b_{i,1}/x_1, \dots, b_{i,n}/x_n, c_{i,n+1}/x_{n+1}, \dots, c_{i,m}/x_m] \end{array}$$

Substitution erhält Äquivalenz

Satz

Gilt $A_1 \sim A_2$ *und* $B_1, \ldots, B_n$ *weitere Aussagen, dann gilt auch* $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] \ \sim \ A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$ alle Variablen, die in A_i, B_i vorkommen

Wahrheitstafel für A_1, A_2:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	A_1	A_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{j,1}$	$\ldots$	$c_{j,n}$	$c_{j,n+1}$	$\ldots$	$c_{j,m}$	d_j	d'_j
$b_{i,1}$	$\ldots$	$b_{i,n}$	$c_{i,n+1}$	$\ldots$	$c_{i,m}$	d_i	d'_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Da $A_1 \sim A_2$, muss gelten $d_j = d'_j$ für alle j

Wahrheitstafel für $A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ und $A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$:

x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_m	B_1	$\ldots$	B_n	$A_1[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$	$A_2[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$c_{i,1}$	$\ldots$	$c_{i,n}$	$c_{i,n+1}$	$\ldots$	$c_{i,m}$	$b_{i,1}$	$\ldots$	$b_{i,n}$	d_i	d'_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Zeige $d_i = d'_i$:

$$\begin{array}{lcl} d_i & = & A_1[b_{i,1}/x_1, \ldots, b_{i,n}/x_n, c_{i,n+1}/x_{n+1}, \ldots, c_{i,m}/x_m] \\ d'_i & = & A_2[b_{i,1}/x_1, \ldots, b_{i,n}/x_n, c_{i,n+1}/x_{n+1}, \ldots, c_{i,m}/x_m] \end{array}$$

Äquivalenz ist kompatibel mit Kontexten

Notation: $F[A]$ Formel mit A an einer Stelle (F ist ein Kontext)

Satz

Sind A, B äquivalente Aussagen, und ist $F[A]$ eine weitere Aussage, dann sind $F[A]$ und $F[B]$ ebenfalls äquivalent.

(Formaler: für alle Kontexte F gilt:
Wenn $A \sim B$, dann auch $F[A] \sim F[B]$)

Kommutativität, Assoziativität, Idempotenz

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

$\wedge$ und $\vee$ sind kommutativ, assoziativ, und idempotent, d.h.:
Für alle Formeln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, $\mathcal{H}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} & \iff & \mathcal{G} \wedge \mathcal{F} \\
\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} & \iff & \mathcal{F} \\
\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H}) & \iff & (\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H} \\
\mathcal{F} \vee \mathcal{G} & \iff & \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \\
\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) & \iff & (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \\
\mathcal{F} \vee \mathcal{F} & \iff & \mathcal{F}
\end{array}
$$

Weitere Rechenregeln

Rechnen

$\neg(\neg A))$	$\iff$	A	
$(A \Rightarrow B)$	$\iff$	$(\neg A \vee B)$	
$(A \iff B)$	$\iff$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$	
$\neg(A \wedge B)$	$\iff$	$\neg A \vee \neg B$	(DeMorgansche Gesetze)
$\neg(A \vee B)$	$\iff$	$\neg A \wedge \neg B$	
$A \wedge (B \vee C)$	$\iff$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C)$	$\iff$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
$(A \Rightarrow B)$	$\iff$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontraposition
$A \vee (A \wedge B)$	$\iff$	A	Absorption
$A \wedge (A \vee B)$	$\iff$	A	Absorption

A, B, C beliebige Aussagen!

Normalformen

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Disjunktive Normalform (DNF)

- Disjunktion von Konjunktionen von Literalen
- $(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (L_{m,1} \wedge \ldots \wedge L_{m,n_m})$ wobei $L_{i,j}$ Literale sind.

Konjunktive Normalform (CNF)

- Konjunktion von Disjunktionen von Literalen
- $(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})$ wobei $L_{i,j}$ Literale sind.

Konjunktive Normalform

$$\underbrace{(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1})}_{\text{Klausel}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})}_{\text{Klausel}}$$

Daher auch: **Klauselnormalform**

Konjunktive Normalform

$$\underbrace{(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1})}_{\text{Klausel}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})}_{\text{Klausel}}$$

Daher auch: **Klauselnormalform**

Mengenschreibweise:

$$\{\underbrace{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}}_{\text{Klausel}}, \ldots, \underbrace{\{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}}_{\text{Klausel}}\}$$

(gerechtfertigt, da $\vee, \wedge$ kommutativ, assoziativ, idempotent)

Konjunktive Normalform = Klauselnormalform = Klauselmenge

Spezielle Klauseln

- **Leere Klausel** $\emptyset := 0 =$ Widerspruch

  Beachte: enthält die CNF eine leere Klausel, so ist die Formel auch widersprüchlich:
  $\{C_1, \ldots, C_n, \emptyset\} = C_1 \land \ldots \land C_n \land 0 \sim 0$

- **Einsklausel**: $\{p\}$ mit p Literal (auch **Unit-Klausel**)

  Beachte: $I(\{C_1, \ldots, C_n, \{p\}\}) = 1$ impliziert $I(p) = 1$

  D.h. jedes Modell muss auch p wahr machen

CNF / DNF Berechnung

Es gilt:

Satz

Zu jeder Aussage kann man eine äquivalente CNF finden und ebenso eine äquivalente DNF.

Allerdings ist die CNF / DNF nicht eindeutig im obigen Satz.
Verfahren zur Berechnung: später

CNF/DNF: Tautologie und Widerspruch

Für die CNF gilt:

- Eine Klausel C ist eine Tautologie gdw. $C = C' \cup \{l, \neg l\}$ (d.h. Literal l kommt positiv und negativ vor)
- Eine Klauselmenge (CNF) ist eine Tautologie gdw. alle Klauseln Tautologien sind

CNF/DNF: Tautologie und Widerspruch

Für die CNF gilt:

- Eine Klausel C ist eine Tautologie gdw. $C = C' \cup \{l, \neg l\}$ (d.h. Literal l kommt positiv und negativ vor)
- Eine Klauselmenge (CNF) ist eine Tautologie gdw. alle Klauseln Tautologien sind

Dual dazu:

Für die DNF gilt: (Monom $= \{l_1, \dots, l_n\}$ mit $(l_1 \wedge \dots \wedge l_n)$)

- Ein Monom D ist widersprüchlich gdw. $D = D' \cup \{l, \neg l\}$ (d.h. Literal l kommt positiv und negativ vor)
- Eine DNF ist widersprüchlich gdw. alle Monome widersprüchlich sind

CNF/DNF: Tautologie und Widerspruch (2)

Satz

- Eine Aussage in **CNF** kann man in Zeit $O(n * log(n))$ auf **Tautologieeigenschaft** testen.
- Eine Aussage in **DNF** kann man in Zeit $O(n * log(n))$ auf **Unerfüllbarkeit** testen.

Dabei ist n die syntaktische Größe der CNF/DNF

Beweis: Verwende die Eigenschaften, und sortiere die Klauseln bzw. Monome

CNF/DNF: Tautologie und Widerspruch (3)

Beachte: Die Umkehrungen gelten **nicht**

- Test einer CNF auf Un-/Erfüllbarkeit
- Test einer DNF auf Allgemeingültig- / Falsifizierbarkeit

wohl nur exponentiell sequentiell durchführbar

(unter der Annahme: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)

Begründung: später

CNF/DNF: Tautologie und Widerspruch (4)

Nochmal

Eine Aussage in **CNF** kann man in Zeit $O(n * log(n))$ auf **Tautologieeigenschaft** testen.

Impliziert:

Transformation einer Formel F in äquivalente CNF geht **nicht in Polynomialzeit** (Annahme dabei $\mathcal{P} \neq Co\mathcal{NP}$)

Begründung:

- anderenfalls könnte man Tautologieeigenschaft in Polynomialzeit entscheiden
- aber Tautologieeigenschaft ist $Co\mathcal{NP}$-vollständig
- DNF: Analog

Dualitätsprinzip

Methoden, Kalküle, Algorithmen haben stets eine **duale Variante**

- $\wedge \leftrightarrow \vee$
- $0 \leftrightarrow 1$
- CNF $\leftrightarrow$ DNF
- Tautologie $\leftrightarrow$ Widerspruch
- Test auf Allgemeingültigkeit $\leftrightarrow$ Test auf Unerfüllbarkeit.

Daher:

- Beweissysteme können Allgemeingültigkeit oder Unerfüllbarkeit testen
- Geschmacksfrage, keine prinzipielle Frage

Satz

Sei F eine Formel.
Dann ist F allgemeingültig gdw. $\neg F$ ein Widerspruch ist

Berechnung der Klauselnormalform

Algorithmus **Transformation in CNF**

Eingabe: Formel F

Algorithmus:
Führe nacheinander die folgenden Schritte durch:

1. Elimination von $\Leftrightarrow$ und $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{lcl} F \Leftrightarrow G & \rightarrow & (F \Rightarrow G) \land (G \Rightarrow F) \\ F \Rightarrow G & \rightarrow & \neg F \lor G \end{array}$$

2. Negation ganz nach innen schieben:

$$\begin{array}{lcl} \neg\neg F & \rightarrow & F \\ \neg(F \land G) & \rightarrow & \neg F \lor \neg G \\ \neg(F \lor G) & \rightarrow & \neg F \land \neg G \end{array}$$

3. Distributivität (und Assoziativität, Kommutativität) iterativ anwenden, um $\land$ nach außen zu schieben („Ausmultiplikation“).
$F \lor (G \land H) \quad \rightarrow \quad (F \lor G) \land (F \lor H)$

Ausgabe ist CNF

Beispiel

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll} & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z)) \\ \to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll} & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \\ \to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\ \to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll}
 & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z)) \\
\to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y))
\end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll}
 & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z)) \\
\to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((\neg Y \lor (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y))
\end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll}
 & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \\
\to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg Y \vee (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg Y \vee (X \wedge Z)) \Rightarrow (\neg X \vee Y))
\end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll}
 & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \land Z)) \\
\to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \Rightarrow (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((\neg Y \lor (X \land Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \lor Y) \Rightarrow (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((\neg Y \lor (X \land Z)) \Rightarrow (\neg X \lor Y)) \\
\to & (\neg(\neg X \lor Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((\neg Y \lor (X \land Z)) \Rightarrow (\neg X \lor Y))
\end{array}$$

Beispiel

$$(X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z))$$

Schritt 1: Äquivalenz und Implikation entfernen

$$\begin{array}{ll}
 & (X \Rightarrow Y) \iff (Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \\
\to & ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \Rightarrow (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg Y \vee (X \wedge Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \\
\to & ((\neg X \vee Y) \Rightarrow (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg Y \vee (X \wedge Z)) \Rightarrow (\neg X \vee Y)) \\
\to & (\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg Y \vee (X \wedge Z)) \Rightarrow (\neg X \vee Y)) \\
\to & (\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$(\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y))$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\rightarrow & ((\neg\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}
$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\neg X \lor Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((\neg\neg X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\neg X \lor Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((\neg\neg X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land (\neg(\neg Y \lor (X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((\neg\neg Y \land \neg(X \land Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((\neg\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg\neg Y \wedge \neg(X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge \neg(X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}
$$

Beispiel (2)

Schritt 2: Negationen nach innen schieben

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((\neg\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge (\neg(\neg Y \vee (X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((\neg\neg Y \wedge \neg(X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge \neg(X \wedge Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\rightarrow & ((X \wedge \neg Y) \vee ((\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\
 & \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z) \lor (X \land \neg Y))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee ((\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee X)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X) \vee (X \wedge \neg Y)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z) \vee (X \wedge \neg Y))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg Y))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\ \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z) \lor (X \land \neg Y))) \\ \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\ \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y))$$

$$\to \quad (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\ \land((\neg X \lor Y) \lor (Y \land (\neg X \lor \neg Z)))$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
& ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\
& \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z) \lor (X \land \neg Y))) \\
& \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
& \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
& \land((\neg X \lor Y) \lor (Y \land (\neg X \lor \neg Z))) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
& \land((\neg X \lor Y \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor (\neg X \lor \neg Z)))
\end{array}
$$

Beispiel (3)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee (X \wedge Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & ((X \wedge \neg Y) \vee ((\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee X)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X) \vee (X \wedge \neg Y)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \wedge ((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \vee Z))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z) \vee (X \wedge \neg Y))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg Y))) \\
 & \wedge((Y \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee (\neg X \vee Y)) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg Y))) \\
 & \wedge((\neg X \vee Y) \vee (Y \wedge (\neg X \vee \neg Z))) \\
\to & (((\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y)) \wedge ((\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg Y))) \\
 & \wedge((\neg X \vee Y \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee (\neg X \vee \neg Z))) \\
= & (\neg Y \vee X \vee X) \wedge (\neg Y \vee X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg Y) \\
 & \wedge(\neg X \vee Y \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg X \vee \neg Z)
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z) \lor (X \land \neg Y))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((\neg X \lor Y) \lor (Y \land (\neg X \lor \neg Z))) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((\neg X \lor Y \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor (\neg X \lor \neg Z))) \\
= & (\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y) \land (\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y) \\
 & \land(\neg X \lor Y \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor \neg X \lor \neg Z) \\
= & (\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z) \land (\neg X \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor \neg Z)
\end{array}
$$

Beispiel (3)

Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$
\begin{array}{ll}
 & ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor (X \land Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & ((X \land \neg Y) \lor ((\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor X)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X) \lor (X \land \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \land ((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((X \land \neg Y) \lor (\neg Y \lor Z))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z) \lor (X \land \neg Y))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((Y \land (\neg X \lor \neg Z)) \lor (\neg X \lor Y)) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((\neg X \lor Y) \lor (Y \land (\neg X \lor \neg Z))) \\
\to & (((\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y)) \land ((\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y))) \\
 & \land((\neg X \lor Y \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor (\neg X \lor \neg Z))) \\
= & (\neg Y \lor X \lor X) \land (\neg Y \lor X \lor \neg Y) \land (\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg Y) \\
 & \land(\neg X \lor Y \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor \neg X \lor \neg Z) \\
= & (\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z) \land (\neg X \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor \neg Z) \\
= & (\neg Y \lor X) \land (\neg Y \lor Z \lor X) \land (\neg Y \lor Z) \land (\neg X \lor Y) \land (\neg X \lor Y \lor \neg Z)
\end{array}
$$

Beispiel (4)

$$(\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$$

Klauselmenge dazu:

$$\{\{\neg Y, X\}, \{\neg Y, Z, X\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg X, Y\}, \{\neg X, Y, \neg Z\}\}$$

Transformation in CNF

- Die erhaltene CNF ist äquivalent zur ursprünglichen Formel
- Laufzeit: Im Worst-Case exponentiell
- Grund: CNF kann exponentiell groß werden:
- die Elimination von $\Leftrightarrow$ verdoppelt die Größe:
  $(A_1 \Leftrightarrow A_2) \to (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_1)$
- Ausmultiplikation mittels Distributivgesetz:
  $A_1 \vee (B_1 \wedge B_2) \to (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2)$
  verdoppelt A_1

Beachte: Unter Erhaltung der Äquivalenz geht es nicht besser
(da sonst Tautologiecheck polynomiell möglich)

Schnelle CNF-Berechnung

Algorithmus zur schnellen CNF-Berechnung
(Tseitin-Transformation)

- in polynomieller Laufzeit
- Erhält die **Tautologieeigenschaft** **nicht**
- Aber: Erhält die **Erfüllbarkeit**:
- F erfüllbar gdw. schnelle CNF zu F erfüllbar

Schnelle CNF-Berechnung (2)

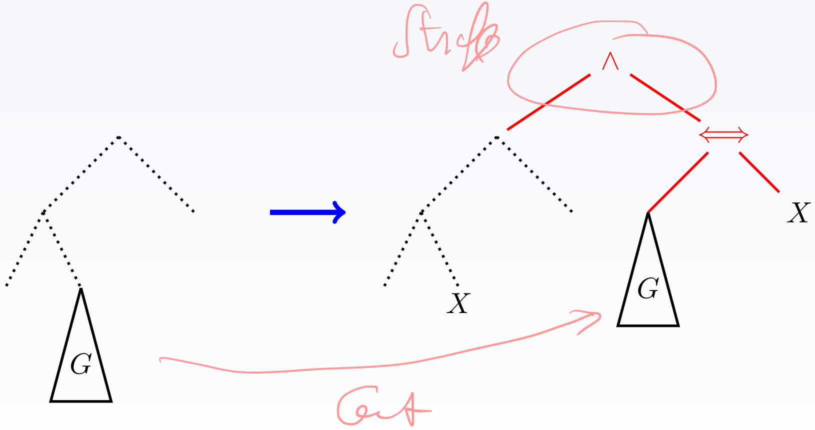
Idee dabei:

- Exponentielles Anwachsen bei der CNF-Berechnung: ist exponentiell in der **Tiefe** der Formel (Tiefe: Formel als Baum hingemalt)
- Daher: Vorverarbeitung: Klopfe die Formel flach

Einführen von Abkürzungen:

$$F[G] \quad \to \quad F[X] \wedge (X \iff G), \text{ wobei } X \text{ neue Variable}$$

Schnelle CNF-Berechnung (3)



Erhaltung der Erfüllbarkeit

Satz

$F[G]$ ist erfüllbar gdw. $(G \iff X) \land F[X]$ erfüllbar ist.
Hierbei muß X eine Variable sein, die nicht in $F[G]$ vorkommt.

Wesentlicher Schritt im Beweis:

- Interpretation I, die bezeugt, dass $F[G]$ erfüllbar ist, d.h. $I(F[G]) = 1$
- Erstelle I' mit

$$I'(Y) = \begin{cases} Y, & \text{wenn } Y \neq X \\ I(G) & \text{wenn } X = Y \end{cases}$$

Nichterhaltung der Tautologieeigenschaft

Annahme: $F[G]$ ist allgemeingültig

Dann ist $(G \iff X) \land F[X]$ niemals allgemeingültig:

Beweis:
Betrachte beliebige Interpretation I mit $I(F[G]) = 1$ (alle Interpretation erfüllen das)

$$I'(Y) = \begin{cases} I(Y), & \text{wenn } Y \neq X \\ f_\neg(I(G)) & \text{wenn } Y = X \end{cases}$$

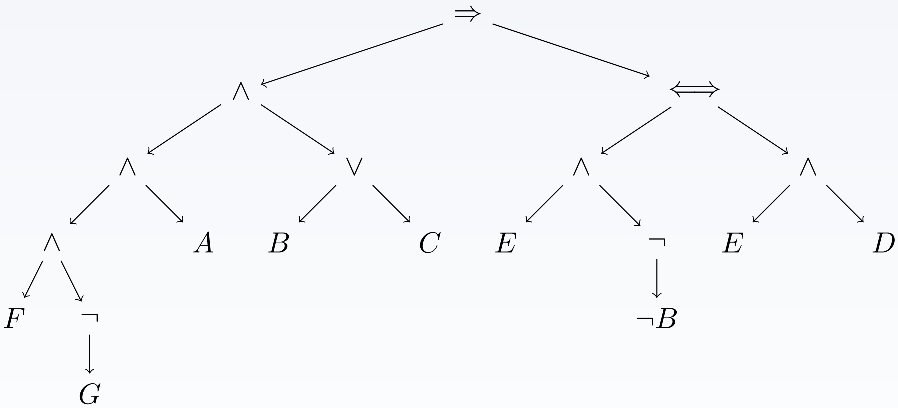
$$\begin{array}{rl} & I'((G \iff X) \land F[X]) \\ = & f_\land(f_{\iff}(I'(G), I'(X)), I'(F[X])) \\ = & f_\land(0, I'(F[x])) = 0 \end{array}$$

- Daher: $((G \iff X) \land F[X])$ **falsifizierbar**
- und **keine Tautolgie**

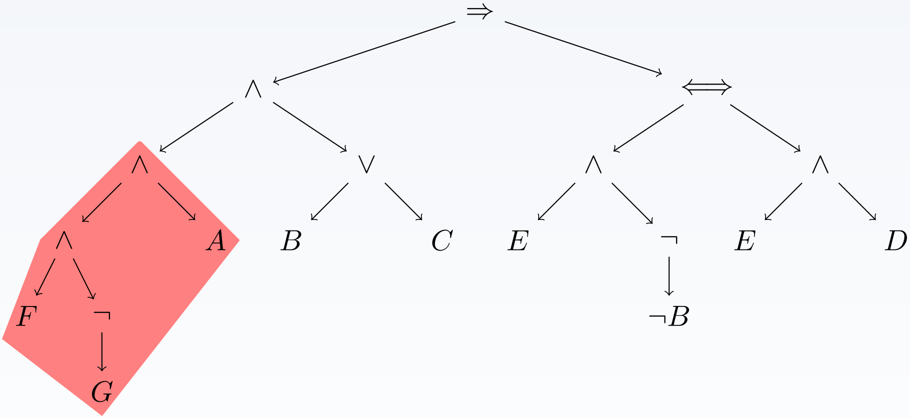
Schnelle CNF-Berechung: Tiefe

- Subformel in Tiefe:
  - F ist Subformel von F in Tiefe 0
  - Wenn $\neg G$ Subformel von F in Tiefe n,
    dann G Subformel von F in Tiefe $n+1$
  - Für $\otimes \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \iff\}$:
    Wenn $(G_1 \otimes G_2)$ Subformel von F in Tiefe n,
    dann G_1, G_2 Subformeln von F in Tiefe $n+1$
- Tiefe einer Formel: Tiefe der tiefsten Subformel

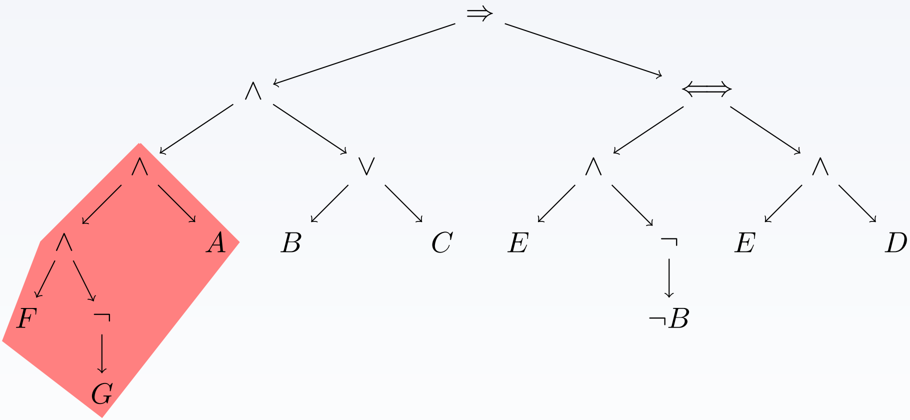
Beispiel



Beispiel

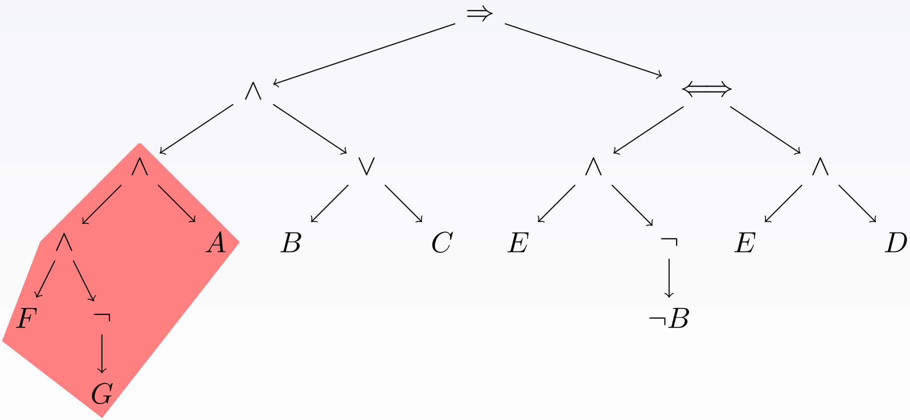


Beispiel



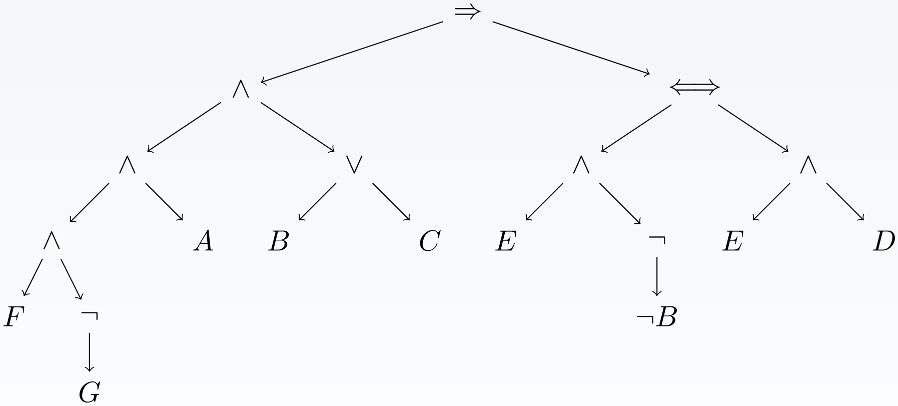
- Subformel in Tiefe 2

Beispiel



- Subformel in Tiefe 2
- Tiefe der Subformel selbst: 3

Beispiel



- Subformel in Tiefe 2
- Tiefe der Subformel selbst: 3
- Tiefe der Gesamtformel: 5

Schnelle CNF: Algorithmus

Algorithmus **Schnelle CNF-Berechnung**

Eingabe: Aussagenlogische Formel F

Verfahren:
Sei F von der Form $H_1 \wedge \ldots \wedge H_n$, wobei H_i keine Konjunktionen sind.
while ein H_i Tiefe ≥ 4 besitzt **do**
  for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
    if H_i hat Tiefe ≥ 4 **then**
      Seien $G_1, \ldots, G_m$ alle Subformeln von H_i in Tiefe 3,
      die selbst Tiefe ≥ 1 haben
      Ersetze H_i wie folgt:
      $H_i[G_1, \ldots, G_m]$
      $\rightarrow (G_1 \iff X_1) \wedge \ldots \wedge (G_m \iff X_m) \wedge H_i[X_1, \ldots, X_m]$
    end if
  end for
  Iteriere mit der entstandenen Formeln als neues F
end while
Wende die (langsame) CNF-Erstellung auf die entstandene Formel an

Eigenschaften

- Am Ende: Alle Subformeln H_i haben Tiefe ≤ 3
  $\implies$ Transformation in konstanter Zeit
- Anzahl der eingef. Abkürzungen: max. linear in der Größe der Formel
- $H_i[G_1, \ldots, G_m] \rightarrow (G_1 \Leftrightarrow X_1) \wedge \ldots (G_m \Leftrightarrow X_m) \wedge H_i[X_1, \ldots, X_m]$
  - Wenn $H_i[G_1, \ldots, G_m]$ Tiefe $n \geq 3$ hat
  - $H_i[X_1, \ldots, X_m]$ hat Tiefe 3
  - G_j hat Tiefe höchstens $n - 3$
  - die neuen Formeln $(G_j \iff X_j)$ haben Tiefe höchstens $n - 2$
  - D.h. 1 Formel der Tiefe n wird im worst case ersetzt durch m Formeln der Tiefe $n - 2$ und eine Formel der Tiefe 3

Bei effizienter Implementierung gilt daher:

Satz

Zu jeder aussagenlogischen Formel kann unter Erhaltung der Erfüllbarkeit eine CNF in Zeit $O(n)$ berechnet werden, wobei n die Größe der aussagenlogischen Formel ist.

Resolutionsverfahren für die Aussagenlogik

Testet Formel auf **Widersprüchlichkeit**

Tautologiecheck für Formel F: Starte mit $\neg F$

Denn es gilt:

Satz

Eine Formel $A_1 \land \ldots \land A_n \Rightarrow F$ ist allgemeingültig gdw. $A_1 \land \ldots \land A_n \land \neg F$ widersprüchlich ist.

Semantisch:

Satz

$\{A_1, \ldots, A_n\} \models F$ gdw. es keine Interpretation I gibt, so dass $I \models \{A_1, \ldots, A_n, \neg F\}$

Resolutionsregel

Operation auf Menge von Klauseln

$$\begin{array}{rll} A \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n & & \text{Elternklausel 1} \\ \neg A \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m & & \text{Elternklausel 2} \\ \hline & B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m & \text{Resolvente} \end{array}$$

Doppelvorkommen von Literalen werden (implizit) eliminiert

Resolutionsregel: Graphische Darstellung

$$A \lor B_1 \lor \ldots \lor B_n \qquad\qquad \neg A \lor C_1 \lor \ldots \lor C_m$$

$$B_1 \lor \ldots \lor B_n \lor C_1 \lor \ldots \lor C_m$$

Resolutionsverfahren

1. Starte mit Klauselmenge $\mathcal{C}$
2. Wähle Elternklauseln E_1, E_2 aus $\mathcal{C}$
3. **Füge** Resolvente R zur Klauselmenge $\mathcal{C}$ **hinzu**:

$$\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{R\}$$

Iteriere die obigen Schritte solange bis:

- Keine neue Resolvente mehr herleitbar, oder
- $\mathcal{C}$ enthält die leere Klausel $\emptyset$.

$\{A\}, \{\neg A\}$

Beispiel

Zeige

$$(A \land (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \implies C \text{ allgemeingültig.}$$

Starte mit negierter Formel (Test auf Widersprüchlichkeit)

$$\neg((A \land (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \implies C)$$

CNF-Berechnung ergibt die Klauselmenge:

$$\{\{A\}, \{-A, B\}, \{-B, C\}, \{-C\}\}$$

Beispiel (2)

$$\{A\} \qquad \{-A, B\} \qquad \{-B, C\} \qquad \{-C\}$$

Beispiel (2)

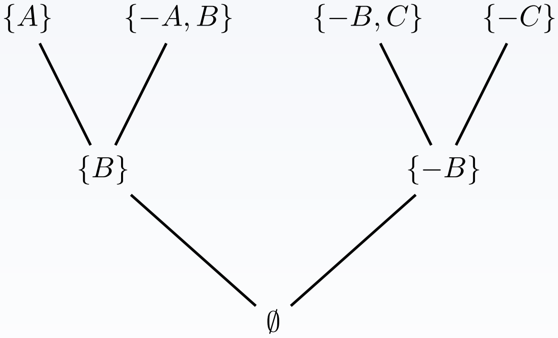
$$\{A\} \qquad \{\neg A, B\} \qquad \{\neg B, C\} \qquad \{\neg C\}$$

$$\{B\}$$

Beispiel (2)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{A\} \arrow[dr, no head] & & \{-A, B\} \arrow[dl, no head] & & \{-B, C\} \arrow[dr, no head] & & \{-C\} \arrow[dl, no head] \\ & \{B\} & & & & \{-B\} & \end{tikzcd}$$

Beispiel (2)



Korrektheit

Satz

Wenn $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ mit Resolution, dann ist $\mathcal{C}$ äquivalent zu $\mathcal{C}'$.

Korrektheit

Satz

Wenn $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ mit Resolution, dann ist $\mathcal{C}$ äquivalent zu $\mathcal{C}'$.

Beweis: Betrachte

- $\mathcal{C} = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2\}$ und $\mathcal{C}' = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2, R\}$
- $E_1 = \{A, B_1, \ldots, B_m\}$ und $E_2 = \{\neg A, C_1, \ldots, C_{m'}\}$
- $R = \{B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_{m'}\}$

Zeige: Für jede Interpretation I gilt: $I(\mathcal{C}) = I(\mathcal{C}')$.

Korrektheit

Satz

Wenn $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ mit Resolution, dann ist $\mathcal{C}$ äquivalent zu $\mathcal{C}'$.

Beweis: Betrachte

- $\mathcal{C} = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2\}$ und $\mathcal{C}' = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2, R\}$
- $E_1 = \{A, B_1, \ldots, B_m\}$ und $E_2 = \{\neg A, C_1, \ldots, C_{m'}\}$
- $R = \{B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_{m'}\}$

Zeige: Für jede Interpretation I gilt: $I(\mathcal{C}) = I(\mathcal{C}')$.
Fallunterscheidung:
$I(\mathcal{C}') = 1$: Dann gilt für alle i: $I(D_i) = 1$, $I(E_i) = 1$ und $I(R) = 1$
und daher auch $I(\mathcal{C}) = 1$

Korrektheit

Satz

Wenn $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ mit Resolution, dann ist $\mathcal{C}$ äquivalent zu $\mathcal{C}'$.

Beweis: Betrachte

- $\mathcal{C} = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2\}$ und $\mathcal{C}' = \{D_1, \ldots, D_n, E_1, E_2, R\}$
- $E_1 = \{A, B_1, \ldots, B_m\}$ und $E_2 = \{\neg A, C_1, \ldots, C_{m'}\}$
- $R = \{B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_{m'}\}$

Zeige: Für jede Interpretation I gilt: $I(\mathcal{C}) = I(\mathcal{C}')$.
Fallunterscheidung:
$I(\mathcal{C}') = 1$: Dann gilt für alle i: $I(D_i) = 1$, $I(E_i) = 1$ und $I(R) = 1$
und daher auch $I(\mathcal{C}) = 1$

$I(\mathcal{C}') = 0$: Wenn es eine Klausel D_i oder E_i gibt mit $I(D_i) = 0$,
dann auch $I(\mathcal{C}) = 0$.
Sonst: nur $I(R) = 0$, d.h. $I(B_i) = I(C_j) = 0$ für alle i, j
Betrachte $I(A)$:
Wenn $I(A) = 0$ kann $I(E_1) = 1$ nicht gelten
Wenn $I(A) = 1$ kann $I(E_2) = 1$ nicht gelten

Widerspruch.

Vollständigkeit (1)

Satz

Die Resolution auf einer aussagenlogischen Klauselmenge terminiert, wenn man einen Resolutionsschritt nur ausführen darf, wenn sich die Klauselmenge vergrößert.

Beweis: Es gibt nur endlich viele verschiedene Klauseln, da Resolution keine neuen Variablen einführt.

Vollständigkeit (2)

Theorem

Für eine unerfüllbare (aussagenlogische) Klauselmenge findet Resolution nach endlich vielen Schritten die leere Klausel.

Beweis: Siehe Skript / Bücher...

D.h.: Für jede Klauselmenge $\mathcal{C}$ kann Resolution entscheiden:
$\mathcal{C}$ widersprüchlich?
ja (Klausel $\emptyset$ wird hergeleitet) oder **nein** (Terminierung ohne $\emptyset$) .

Tautologie-Test

Sei F beliebige Formel

1. Starte mit $\neg F$
2. Transformiere $\neg F$ in CNF $\mathcal{C}$
   (auch schnelle CNF erhält Erfüllbarkeit & Widersprüchlichkeit)
3. Verwende Resolution beginnend mit $\mathcal{C}$ bis Stop
4. wenn $\mathcal{C}$ widersprüchlich, dann $\neg F$ widersprüchlich, und daher F Tautologie
5. wenn $\mathcal{C}$ erfüllbar, dann $\neg F$ erfüllbar, und daher F keine Tautologie

Herleitung

Zeige $\{F_1, \ldots, F_n\} \models G$:

1. Zeige dass $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \implies G$ allgemeingültig (Deduktionstheorem)
2. $\neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \implies G)$ ist äquivalent zu $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G)$
3. Verwende CNF-Algorithmus und anschließend Resolution

Durch Aufzählen kann man alle semantischen Folgerungen auch syntaktisch damit durchführen. Daher: Verfahren ist vollständig.

Komplexität

Es gibt Formeln, so dass **exponentiell viele** Resolutionen nötig sind, um die leere Klausel herzuleiten (Armin Haken 1985)

Die sogenannten **Taubenschlagformeln**

TSF^{n+1}: $n+1$ Tauben sitzen in n Löchern, wobei in jedem Loch höchstens eine Taube sitzt

$$TSF^{n+1} = \left(\bigwedge_{T=1}^{n+1} \bigvee_{L=1}^{n} \mathsf{S}_L^T\right) \wedge \left(\bigwedge_{T=1}^{n} \bigwedge_{X=T+1}^{n+1} \bigwedge_{L=1}^{n} (\mathsf{S}_L^T \Rightarrow \neg \mathsf{S}_L^X)\right)$$

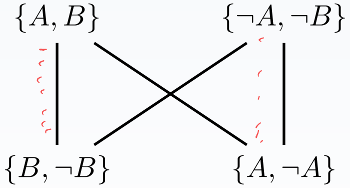
$$\left\{\begin{array}{ll} \mathsf{S}_L^T & = \text{Taube } T \text{ sitzt in Loch } L \\ \bigwedge_{T=1}^{n+1} \bigvee_{L=1}^{n} \mathsf{S}_L^T & = \text{jede Taube } T \text{ sitzt in einem der } n \text{ Löcher} \\ \bigwedge_{T=1}^{n} \bigwedge_{X=T+1}^{n+1} \bigwedge_{L=1}^{n} (\mathsf{S}_L^T \Rightarrow \neg \mathsf{S}_L^X) & = \text{Jedes Loch einzeln besetzt} \end{array}\right.$$

Resolutionsverfahren

Ein Nachteil:

Modelle bei erfüllbaren Formeln nicht immer ablesbar

Beispiel:



Beispiel: Warum will man Modelle finden?

Die Frage nach dem Pfefferdieb

3 Verdächtige: Hutmacher, Schnapphase, Hasel-Maus

- Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- Schnapphase: „Der Hutmacher ist unschuldig."
- Hutmacher: „Die Hasel-Maus ist unschuldig"

Wer ist der Dieb?

Kodierung: H, S, M, für „ist schuldig", Modell liefert Lösung

Beispiel: Warum will man Modelle finden?

Die Frage nach dem Pfefferdieb

3 Verdächtige: Hutmacher, Schnapphase, Hasel-Maus

- Genau einer von ihnen ist der Dieb.
  $(H \vee S \vee M) \wedge (H \Rightarrow \neg(S \vee M)) \wedge (S \Rightarrow \neg(H \vee M)) \wedge (M \Rightarrow \neg(H \vee S))$
- Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- Schnapphase: „Der Hutmacher ist unschuldig.“
- Hutmacher: „Die Hasel-Maus ist unschuldig“

Wer ist der Dieb?

Kodierung: H, S, M, für „ist schuldig“, Modell liefert Lösung

Beispiel: Warum will man Modelle finden?

Die Frage nach dem Pfefferdieb

3 Verdächtige: Hutmacher, Schnapphase, Hasel-Maus

- Genau einer von ihnen ist der Dieb.
  $(H \lor S \lor M) \land (H \Rightarrow \neg(S \lor M)) \land (S \Rightarrow \neg(H \lor M)) \land (M \Rightarrow \neg(H \lor S))$
- Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- Schnapphase: „Der Hutmacher ist unschuldig."
  $\neg S \Rightarrow \neg H$
- Hutmacher: „Die Hasel-Maus ist unschuldig"

Wer ist der Dieb?

Kodierung: H, S, M, für „ist schuldig", Modell liefert Lösung

Beispiel: Warum will man Modelle finden?

Die Frage nach dem Pfefferdieb

3 Verdächtige: Hutmacher, Schnapphase, Hasel-Maus

- Genau einer von ihnen ist der Dieb.
  $(H \vee S \vee M) \wedge (H \Rightarrow \neg(S \vee M)) \wedge (S \Rightarrow \neg(H \vee M)) \wedge (M \Rightarrow \neg(H \vee S))$
- Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- Schnapphase: „Der Hutmacher ist unschuldig."
  $\neg S \Rightarrow \neg H$
- Hutmacher: „Die Hasel-Maus ist unschuldig"
  $\neg H \Rightarrow \neg M$

Wer ist der Dieb?

Kodierung: H, S, M, für „ist schuldig", Modell liefert Lösung

Beispiel (Forts.)

Wissen:

- $H \lor S \lor M$
- $H \Rightarrow \neg(S \lor M)$
- $S \Rightarrow \neg(H \lor M)$
- $M \Rightarrow \neg(H \lor S)$
- $\neg S \Rightarrow \neg H$
- $\neg H \Rightarrow \neg M$

Klauselmenge dazu:

- $\{H, S, M\}$
- $\{\neg H, \neg S\}$
- $\{\neg H, \neg M\}$
- $\{\neg S, \neg M\}$
- $\{S, \neg H\}$
- $\{H, \neg M\}$

Resolution dazu

$\{H, S, M\}$ $\{\neg H, \neg S\}$ $\{\neg H, \neg M\}$ $\{\neg S, \neg M\}$ $\{S, \neg H\}$ $\{H, \neg M\}$

Resolution dazu

$\{H, S, M\}$ $\{\neg H, \neg S\}$ $\{\neg H, \neg M\}$ $\{\neg S, \neg M\}$ $\{S, \neg H\}$ $\{H, \neg M\}$

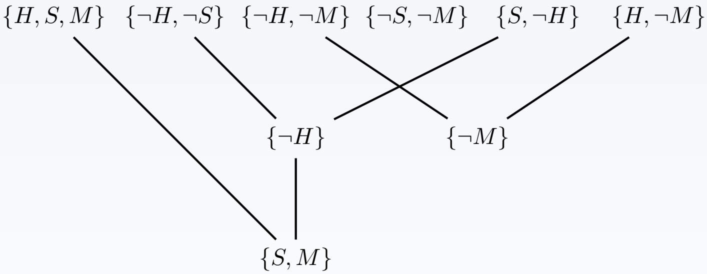
$\{\neg H\}$

Resolution dazu

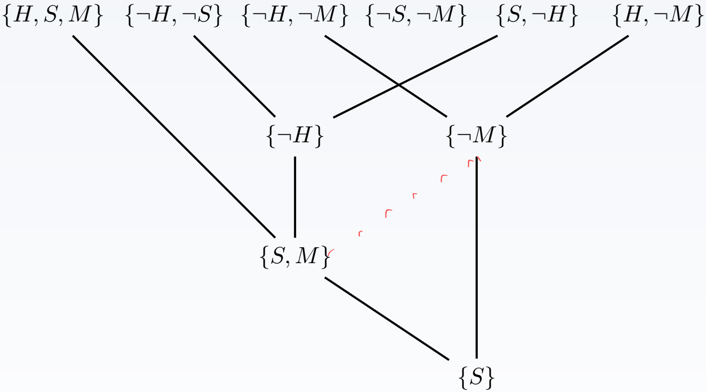
$$\{H, S, M\} \quad \{\neg H, \neg S\} \quad \{\neg H, \neg M\} \quad \{\neg S, \neg M\} \quad \{S, \neg H\} \quad \{H, \neg M\}$$

$$\{\neg H\} \qquad \{\neg M\}$$

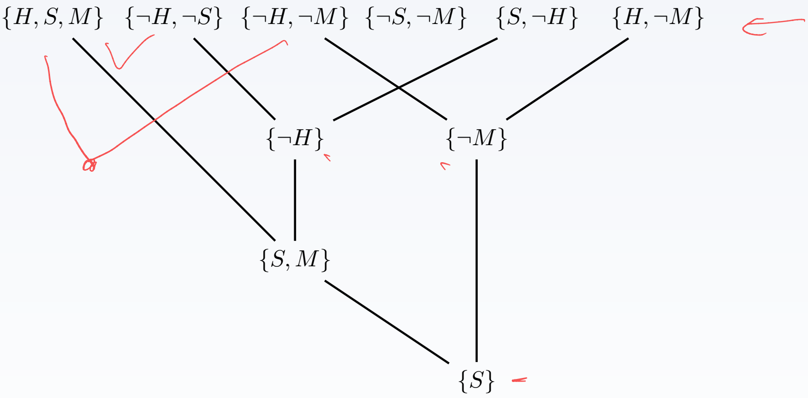
Resolution dazu



Resolution dazu



Resolution dazu



- Klauselmenge nur erfüllbar, wenn die 1-Klauseln wahr sind.
- Mögliches Modell daher $S, \neg M, \neg H$
- Prüfung ergibt: Ja ist Modell
- Also ist der Schnapphase schuldig

Optimierungen des Resolutionsverfahrens

- Bestimmte Klauseln brauchen nicht betrachtet zu werden.;
- diese können **gelöscht**, bzw. brauchen erst gar nicht erzeugt zu werden
- Optimierung, da weniger Klauseln betrachtet werden müssen

Optimierungen des Resolutionsverfahrens (2)

Tautologische Klauseln $=$ Klauseln die A und $\neg A$ enthalten

Satz

Sei K tautologische Klausel, $\mathcal{C}$ Klauselmenge:
$\mathcal{C}$ ist äquivalent zu $\mathcal{C} \cup \{K\}$

Beweis: Klar, da jede Interpretation K wahr macht

Im Resolutionsverfahren: **Lösche** tautologische Klauseln

Optimierungen des Resolutionsverfahrens (3)

Ein Literal L_i ist **isoliertes Literal** in Klauselmenge $\mathcal{C}$ gdw. $\overline{L_i}$ nicht in $\mathcal{C}$ vorkommt, wobei $\overline{L_i} := \begin{cases} \neg X_i, & \text{falls } L_i = X_i \\ X_i, & \text{falls } L_i = \neg X_i \end{cases}$

Satz

Sei $\mathcal{C}$ Klauselmenge, $\mathcal{C}'$ Klauselmenge in der alle Klauseln gelöscht sind, die isolierte Literale enthalten.
$\mathcal{C}$ ist **erfüllbarkeits**äquivalent zu $\mathcal{C}'$, d.h. $\mathcal{C}$ ist erfüllbar gdw. $\mathcal{C}'$ ist erfüllbar.

„$\Rightarrow$“: Jede Interpretation die $\mathcal{C}$ erfüllt, erfüllt auch $\mathcal{C}'$ (weniger Klauseln).
„$\Leftarrow$“: Wenn I Klauselmenge $\mathcal{C}'$ erfüllt, dann erfüllt I' Klauselmenge $\mathcal{C}$, wobei

$$I'(X) = \begin{cases} 1, & \text{für isolierte Literale } L_i = X \\ 0, & \text{für isolierte Literale } L_i = \neg X \\ I(X), & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Resolutionsverfahren: **Lösche** Klauseln mit isolierten Literalen

Beachte ...

Löschen von isolierten Literalen ist **keine** Äquivalenzumformung

Beispiel: $\{\{A, \neg A\}, \{B\}\}$ ist nicht äquivalent zu $\{\{A, \neg A\}\}$

- $\{\{A, \neg A\}\}$ ist Tautologie
- $\{\{A, \neg A\}, \{B\}\}$ ist falsifizierbar (mit $I(B) = 0$)

Da Resolution nach (Un-)erfüllbarkeit sucht, reicht aber Erfüllbarkeitsäquivalenz aus.

Optimierungen des Resolutionsverfahrens (4)

Eine Klausel K_1 **subsumiert** Klausel K_2 gdw. $K_1 \subseteq K_2$.
Sprechweise auch: „K_2 wird subsumiert von K_1“

"hat mehr Information"

Satz

Die Klauselmenge $\mathcal{C} \cup \{K_1\} \cup \{K_2\}$ ist äquivalent zu $\mathcal{C} \cup \{K_1\}$, wenn K_1 die Klausel K_2 subsumiert.

Sei I Interpretation. Zwei Fälle:

- $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\} \cup \{K_2\}) = 1$. Dann macht I alle Klauseln wahr, also gilt $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\}) = 1$
- $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\} \cup \{K_2\}) = 0$. Wenn $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\}) = 0$, dann klar. Sonst nehme an $I(K_2) = 0$, aber $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\}) = 1$. Da $K_2 \supseteq K_1$ muss aber gelten $I(K_1) = 0$. Widerspruch, daher $I(\mathcal{C} \cup \{K_1\}) = 0$

Im Resolutionsverfahren: **Lösche** subsumierte Klauseln

Optimierungen des Resolutionsverfahrens (5)

Zusammenfassend

- Tautologische Klauseln
- Klauseln die isolierte Literale enthalten
- Subsumierte Klauseln

können im Resolutionsverfahren gelöscht werden, da das Finden der leeren Klausel (ja/nein) dadurch nicht verändert wird. (Erfüllbarkeit, Widersprüchlichkeit bleibt gleich)

Das DPLL-Verfahren

Namensgebung

- Martin Davis und Hilary Putnam, 1960: Resolution-basiertes Verfahren
- Martin **D**avis, Hilary **P**utnam, George **L**ogemann und Donald W. **L**oveland, 1962: Verbesserung des Verfahres (insbes. Platz)
- Oft DPLL-Verfahren, aber auch DP-Verfahren, Davis-Putnam-Prozedur

Grobe Eigenschaften

- Grundlage vieler moderner SAT-Solver
- Kombination aus: Resolution mit Subsumtion und Fallunterscheidung
- Verwendet Backtracking
- Kann Modelle für erfüllbare Klauseln einfach erzeugen

DPLL-Algorithmus (1)

Eingabe:

- Klauselmenge $\mathcal{C}$
- Annahme: Tautologische Klauseln bereits entfernt

Ausgabe:

- `true`, wenn $\mathcal{C}$ unerfüllbar
- `false`, wenn $\mathcal{C}$ erfüllbar
- Erweiterung: auch ein Modell wenn $\mathcal{C}$ erfüllbar

DPLL beantwortet daher die Frage:

Ist $\mathcal{C}$ widersprüchlich?

Antwortet Ja bzw. Nein.

DPLL-Algorithmus (2)

Algorithmus **DPLL-Prozedur**

Funktion DPLL($\mathcal{C}$):

if $\emptyset \in \mathcal{C}$ then `return true`; *// unerfüllbar*
if $\mathcal{C} = \emptyset$ then `return false`; *// erfüllbar*
if $\mathcal{C}$ enthält 1-Klausel $\{L\}$ then
  Sei $\mathcal{C}'$ die Klauselmenge, die aus $\mathcal{C}$ entsteht, indem
   (1) alle Klauseln, die L enthalten, entfernt werden und
   (2) in den verbleibenden Klausel alle Literale $\overline{L}$ entfernt werden
    (wobei $\overline{L} = \neg X$, wenn $L = X$ und $\overline{L} = X$, wenn $L = \neg X$)
  DPLL($\mathcal{C}'$); *// rekursiver Aufruf*
if $\mathcal{C}$ enthält isoliertes Literal L then
  Sei $\mathcal{C}'$ die Klauselmenge, die aus $\mathcal{C}$ entsteht, indem alle Klauseln, die L enthalten, entfernt werden.
  DPLL($\mathcal{C}'$); *// rekursiver Aufruf*
// Nur wenn keiner der obigen Fälle zutraf:
Wähle Atom A, das in C vorkommt;
`return` DPLL($\mathcal{C} \cup \{\{A\}\}$) $\wedge$ DPLL($\mathcal{C} \cup \{\{\neg A\}\}$) *// Fallunterscheidung*

DPLL-Prozedur: Erläuterungen

if $\mathcal{C}$ enthält 1-Klausel $\{L\}$ **then**
Sei $\mathcal{C}'$ die Klauselmenge, die aus $\mathcal{C}$ entsteht, indem
(1) alle Klauseln, die L enthalten, entfernt werden und
(2) in den verbleibenden Klausel alle Literale $\overline{L}$ entfernt werden
(wobei $\overline{L} = \neg X$, wenn $L = X$ und $\overline{L} = X$, wenn $L = \neg X$)

- (1) entspricht der Subsumtion:

$$\{A\}, \ldots, \{A, B, C\}, \ldots$$

entferne $\{A, B, C\}$, da $\{A\}$ die Klausel $\{A, B, C\}$ subsumiert.

- (2) entspricht der Resolution mit anschließender Subsumtion

$$\begin{array}{ccc} \{L\} & & \{\overline{L}, L'_1, \ldots, L'_n\} \\ & \{L'_1, \ldots, L'_n\} & \end{array}$$

- Entfernen von $\{A\}$: „Setze $I(A) = 1$“, sonst sowieso nicht erfüllbar

DPLL-Prozedur: Erläuterungen (2)

```
if 𝒞 enthält isoliertes Literal L then
    Sei 𝒞′ die Klauselmenge, die aus 𝒞 entsteht, indem alle Klauseln,
    die L enthalten, entfernt werden.
    DPLL(𝒞′); // rekursiver Aufruf
```

Entspricht der Löschregel für isolierte Literale

```
// Nur wenn keiner der obigen Fälle zutraf:
Wähle Atom A, dass in C vorkommt;
return DPLL(𝒞 ∪ {{A}}) ∧ DPLL(𝒞 ∪ {{¬A}}) // Fallunterscheidung
```

Fallunterscheidung, ob A wahr oder falsch ist (bei erfüllbar)
bei Unerfüllbarkeitsfrage: $\mathcal{C}$ muss für A wahr und A falsch jeweils unerfüllbar sein.

DPLL in Haskell

```haskell
dpll :: [[Int]] -> Bool
dpll [] = False
dpll cnf
 | [] `elem` cnf = True
 | otherwise =
    case getUnit cnf of
     Just [x] ->
      dpll [delete (negate x) clause | clause <- cnf, not (x `elem` clause)]
     Nothing ->
      if not (null isolated) then
        dpll [clause | clause <- cnf, let (isolit:_)=isolated,
                                      not (isolit `elem` clause)]
      else (dpll ([lit]:cnf)) && (dpll ([negate lit]:cnf))
   where
    literals = (nub . sort . concat) cnf
    isolated = [lit | lit <- literals, not ((negate lit) `elem` literals)]
    ((lit:clause):_) = cnf
    getUnit []        = Nothing
    getUnit ([x]:_)   = Just [x]
    getUnit (_:xxs)   = getUnit xxs
```

Fallunterscheidung

- Verschiedene Heuristiken **welches Literal** gewählt wird.
- Gute Heuristik:

  Wähle Literal so, dass es in
  möglichst kurzen Klauseln vorkommt
- Erhöht Wahrscheinlichkeit, dass große Anteile der Klauselmenge in wenigen Schritten gelöscht werden.

Beispiel: Pfefferdieb

Wissen:

- $H \vee S \vee M$
- $H \Rightarrow \neg(S \vee M)$
- $S \Rightarrow \neg(H \vee M)$
- $M \Rightarrow \neg(H \vee S)$
- $\neg S \Rightarrow \neg H$
- $\neg H \Rightarrow \neg M$

Klauselmenge dazu:

- $\{H, S, M\}$
- $\{\neg H, \neg S\}$
- $\{\neg H, \neg M\}$
- $\{\neg S, \neg M\}$
- $\{S, \neg H\}$
- $\{H, \neg M\}$

Beispiel (2)

DPLL($\{\{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\}$)

- Keine 1-Klauseln
- Keine isolierten Literale
- Daher Fallunterscheidung

(1) DPLL($\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\}$)

$\wedge$

(2) DPLL($\{\{\neg S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\}$)

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL$(\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\})$

- 1-Klausel $\{S\}$

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL$(\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\})$

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}}, \underline{\{H, S, M\}}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \underline{\{S, \neg H\}}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL($\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}}, \underline{\{H, S, M\}}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \underline{\{S, \neg H\}}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$
  entferne $\neg S$ aus allen Klauseln: $\{\{\neg H, \underline{\neg S}\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\underline{\neg S}, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $(\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\})$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\}$)

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL($\{\{S\},\{H,S,M\},\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\{S,\neg H\},\{H,\neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}},\underline{\{H,S,M\}},\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\underline{\{S,\neg H\}},\{H,\neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\{H,\neg M\}\}$
  entferne $\neg S$ aus allen Klauseln: $\{\{\neg H,\underline{\neg S}\},\{\neg H,\neg M\},\{\underline{\neg S},\neg M\},\{H,\neg M\}\}$

  ergibt $(\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\})$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\}$)

DPLL($\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{\neg H\}$
- Entfernen der Klauseln mit $\neg H$ und Löschen von H ergibt $\{\{\neg M\}\}$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg M\}\}$)

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL$(\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\})$

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}}, \underline{\{H, S, M\}}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \underline{\{S, \neg H\}}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$
  entferne $\neg S$ aus allen Klauseln: $\{\{\neg H, \underline{\neg S}\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\underline{\neg S}, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $(\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\})$
  Rekursiver Aufruf: DPLL$(\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\})$

DPLL$(\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\})$

- 1-Klausel $\{\neg H\}$
- Entfernen der Klauseln mit $\neg H$ und Löschen von H ergibt $\{\{\neg M\}\}$
  Rekursiver Aufruf: DPLL$(\{\{\neg M\}\})$

DPLL$(\{\{\neg M\}\})$ ergibt rekursiver Aufruf: DPLL$(\{\})$

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL($\{\{S\}, \{H, S, M\}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{S, \neg H\}, \{H, \neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}}, \underline{\{H, S, M\}}, \{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \underline{\{S, \neg H\}}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H, \neg S\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg S, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$
  entferne $\neg S$ aus allen Klauseln: $\{\{\neg H, \underline{\neg S}\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\underline{\neg S}, \neg M\}, \{H, \neg M\}\}$

  ergibt $(\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\})$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\}$)

DPLL($\{\{\neg H\}, \{\neg H, \neg M\}, \{\neg M\}, \{H, \neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{\neg H\}$
- Entfernen der Klauseln mit $\neg H$ und Löschen von H ergibt $\{\{\neg M\}\}$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg M\}\}$)

DPLL($\{\{\neg M\}\}$) ergibt rekursiver Aufruf: DPLL($\{\}$)
DPLL($\{\}$) ergibt `false` $\to$ erfüllbar,

Beispiel (3)

Fall (1):
DPLL($\{\{S\},\{H,S,M\},\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\{S,\neg H\},\{H,\neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{S\}$
- entferne alle Klauseln die $\{S\}$ enthalten:
  $\{\underline{\{S\}},\underline{\{H,S,M\}},\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\underline{\{S,\neg H\}},\{H,\neg M\}\}$

  ergibt $\{\{\neg H,\neg S\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg S,\neg M\},\{H,\neg M\}\}$
  entferne $\neg S$ aus allen Klauseln: $\{\{\neg H,\underline{\neg S}\},\{\neg H,\neg M\},\{\underline{\neg S},\neg M\},\{H,\neg M\}\}$

  ergibt $(\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\})$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\}$)

DPLL($\{\{\neg H\},\{\neg H,\neg M\},\{\neg M\},\{H,\neg M\}\}$)

- 1-Klausel $\{\neg H\}$
- Entfernen der Klauseln mit $\neg H$ und Löschen von H ergibt $\{\{\neg M\}\}$
  Rekursiver Aufruf: DPLL($\{\{\neg M\}\}$)

DPLL($\{\{\neg M\}\}$) ergibt rekursiver Aufruf: DPLL($\{\}$)
DPLL($\{\}$) ergibt `false` $\rightarrow$ erfüllbar, Modell?

DPLL: Modell generieren

1. Isolierte Literale werden als wahr angenommen.
2. Literale in 1-Klauseln werden ebenfalls als wahr angenommen.
3. Dadurch nicht belegte Variablen können für das vollständige Modell beliebig belegt werden

Komplexität

Im Worst Case:

- Exponentielle Laufzeit
- Exponentiell in: Anzahl der verschiedenen Variablen

Besser geht es nach aktuellem Stand des Wissens nicht, da SAT $\mathcal{NP}$-vollständig.

DPLL zum Problemlösen

- Idee: Kodiere Problem als Aussagenlogische Formel
- Modell entspricht Lösung des Problems
- Erst Umformung in CNF (geht mit schneller CNF), dann DPLL
- Oft: Kodierung direkt als CNF
- Wir betrachten einige Beispielanwendungen

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
   $knisi \iff (knusi \implies \neg knesi)$
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
   $knisi \iff (knusi \implies \neg knesi)$
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
   $knosi \iff (knesi \land knuesi)$
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
   $knisi \iff (knusi \implies \neg knesi)$
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
   $knosi \iff (knesi \wedge knuesi)$
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
   $knusi \iff (knuesi \implies knisi)$
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
   $knisi \iff (knusi \implies \neg knesi)$
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
   $knosi \iff (knesi \wedge knuesi)$
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
   $knusi \iff (knuesi \implies knisi)$
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
   $knoesi \iff (knasi\ \mathsf{XOR}\ knisi)$
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.

Logelei aus der Zeit

Abianer sagen die Wahrheit, Bebianer Lügen.

1. Knasi: Knisi ist Abianer.
   $knasi \iff knisi$
2. Knesi: Wenn Knösi Bebianer, dann ist auch Knusi ein Abianer.
   $knesi \iff (\neg knoesi \implies knusi)$
3. Knisi: Wenn Knusi Abianer, dann ist Knesi Bebianer.
   $knisi \iff (knusi \implies \neg knesi)$
4. Knosi: Knesi und Knüsi sind beide Abianer.
   $knosi \iff (knesi \land knuesi)$
5. Knusi: Wenn Knüsi Abianer ist, dann ist auch Knisi Abianer.
   $knusi \iff (knuesi \implies knisi)$
6. Knösi: Entweder ist Knasi oder Knisi Abianer.
   $knoesi \iff (knasi \,\mathsf{XOR}\, knisi)$
7. Knüsi: Knosi ist Abianer.
   $knuesi \iff knosi$

DPLL-Algorithmus liefert:

```
(knasi <=> knisi)
/\
(knesi <=> (-knoesi => knusi))
/\
(knisi <=> (knusi => -knesi))
/\
(knosi <=> (knesi /\ knuesi))
/\
(knusi <=> (knuesi => knisi))
/\
(knoesi <=> (-(knasi <=> knisi)))
/\
(knuesi <=> knosi)
```

DPLL-Algorithmus liefert:

```
(knasi <=> knisi)
/\
(knesi <=> (-knoesi => knusi))
/\
(knisi <=> (knusi => -knesi))
/\
(knosi <=> (knesi /\ knuesi))
/\
(knusi <=> (knuesi => knisi))
/\
(knoesi <=> (-(knasi <=> knisi)))
/\
(knuesi <=> knosi)

Das Ergebnis des DP-Algorithmus ist:
Fuer die berechnete Klauselmenge existiert ein Modell:
[-knuesi,-knosi,-knoesi,-knasi,knesi,knusi,-knisi]
```

Knesi und Knusi sind Abianer,

Knüsi, Knosi, Knösi, Knisi sind Bebianer

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars
- Fisch: ich wars nicht
- Herzbube: ich wars
- Genau einer ist der Dieb
- höchstens einer hat gelogen

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars
  $\mathit{froschSagtWahrheit} \implies \mathit{fischIstDieb}$
- Fisch: ich wars nicht
- Herzbube: ich wars
- Genau einer ist der Dieb
- höchstens einer hat gelogen

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars
  $froschSagtWahrheit \implies fischIstDieb$
- Fisch: ich wars nicht
  $fischSagtWahrheit \implies \neg fischIstDieb$
- Herzbube: ich wars
- Genau einer ist der Dieb
- höchstens einer hat gelogen

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars
  $froschSagtWahrheit \implies fischIstDieb$
- Fisch: ich wars nicht
  $fischSagtWahrheit \implies \neg fischIstDieb$
- Herzbube: ich wars
  $bubeSagtWahrheit \implies bubeIstDieb$
- Genau einer ist der Dieb
- höchstens einer hat gelogen

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars

  $froschSagtWahrheit \implies fischIstDieb$

- Fisch: ich wars nicht

  $fischSagtWahrheit \implies \neg fischIstDieb$

- Herzbube: ich wars

  $bubeSagtWahrheit \implies bubeIstDieb$

- Genau einer ist der Dieb

  $$\begin{array}{ll} & (fischIstDieb \land \neg froschIstDieb \land \neg bubeIstDieb) \\ \lor & (\neg fischIstDieb \land froschIstDieb \land \neg bubeIstDieb) \\ \lor & (\neg fischIstDieb \land \neg froschIstDieb \land bubeIstDieb) \end{array}$$

- höchstens einer hat gelogen

Diebstahl von Salz

Verdächtige: Lakai mit Froschgesicht, Lakai mit Fischgesicht, Herzbube.

- Frosch: der Fisch wars

  $froschSagtWahrheit \implies fischIstDieb$

- Fisch: ich wars nicht

  $fischSagtWahrheit \implies \neg fischIstDieb$

- Herzbube: ich wars

  $bubeSagtWahrheit \implies bubeIstDieb$

- Genau einer ist der Dieb

$$\begin{array}{ll} & (fischIstDieb \land \neg froschIstDieb \land \neg bubeIstDieb) \\ \lor & (\neg fischIstDieb \land froschIstDieb \land \neg bubeIstDieb) \\ \lor & (\neg fischIstDieb \land \neg froschIstDieb \land bubeIstDieb) \end{array}$$

- höchstens einer hat gelogen

$$\begin{array}{ll} & (\neg froschSagtWahrheit \implies fischSagtWahrheit \land bubeSagtWahrheit) \\ \land & (\neg fischSagtWahrheit \implies froschSagtWahrheit \land bubeSagtWahrheit) \\ \land & (\neg bubeSagtWahrheit \implies froschSagtWahrheit \land fischSagtWahrheit) \end{array}$$

DPLL-Algorithmus liefert ...

```
(froschSagtWahrheit => fischIstDieb)
/\
(fischSagtWahrheit => -fischIstDieb)
/\
(bubeSagtWahrheit => bubeIstDieb)
/\
(    (fischIstDieb /\ -froschIstDieb /\ -bubeIstDieb)
  \/ (-fischIstDieb /\ froschIstDieb /\ -bubeIstDieb)
  \/ (-fischIstDieb /\ -froschIstDieb /\ bubeIstDieb) )
/\
(     (-froschSagtWahrheit => fischSagtWahrheit /\ bubeSagtWahrheit)
  /\  (-fischSagtWahrheit => froschSagtWahrheit /\ bubeSagtWahrheit)
  /\  (-bubeSagtWahrheit => froschSagtWahrheit /\ fischSagtWahrheit) )
```

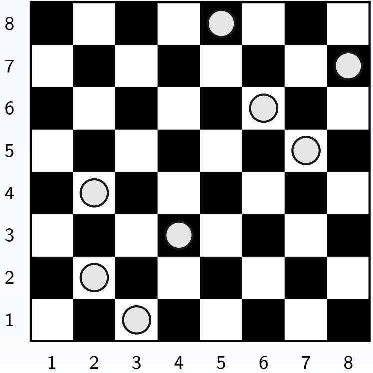
DPLL-Algorithmus liefert ...

```
(froschSagtWahrheit => fischIstDieb)
/\
(fischSagtWahrheit => -fischIstDieb)
/\
(bubeSagtWahrheit => bubeIstDieb)
/\
(    (fischIstDieb /\ -froschIstDieb /\ -bubeIstDieb)
  \/ (-fischIstDieb /\ froschIstDieb /\ -bubeIstDieb)
  \/ (-fischIstDieb /\ -froschIstDieb /\ bubeIstDieb) )
/\
(     (-froschSagtWahrheit => fischSagtWahrheit /\ bubeSagtWahrheit)
  /\  (-fischSagtWahrheit => froschSagtWahrheit /\ bubeSagtWahrheit)
  /\  (-bubeSagtWahrheit => froschSagtWahrheit /\ fischSagtWahrheit) )

Das Ergebnis des DP-Algorithmus ist:
Fuer die berechnete Klauselmenge existiert ein Modell:
[-froschIstDieb,bubeIstDieb,bubeSagtWahrheit,fischSagtWahrheit,
 -froschSagtWahrheit,-fischIstDieb]
```

$\Rightarrow$ Herzbube ist der Dieb, und Lakai mit Froschgesicht hat gelogen

N-Damen als SAT-Problem



N-Damen als SAT-Problem (2)

Direkte Kodierung als CNF, Aussagenlogische Variablen sind Zahlen (negative Zahlen = negierte Literale)

```
nDamen n =
    (proZeileEineDame n)
 ++ (proSpalteEineDame n)
 ++ (bedrohendePaare n)


koordinateZuZahl (x,y) n =  (x-1)*n+y

proZeileEineDame n =
 [[koordinateZuZahl (i,j) n | j <- [1..n]] | i <- [1..n]]

proSpalteEineDame n =
 [[koordinateZuZahl (i,j) n | i <- [1..n]] | j <- [1..n]]
```

N-Damen als SAT-Problem (2)

```
bedrohendePaare n =
 [[negate (koordinateZuZahl  (x1,y1) n),
   negate (koordinateZuZahl  (x2,y2) n)]
    | x1 <- [1..n],
      y1 <- [1..n],
      x2 <- [1..n],
      y2 <- [1..n],
      (x1,y1) < (x2,y2),
      bedroht (x1,y1,x2,y2)]

bedroht (a,x,b,y)
 | a == b = True
 | x == y = True
 | abs (a-b) == abs (y-x) = True
 | otherwise = False
```

N-Damen als SAT-Problem (3)

```
*Main> nDamen 4
[[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12],[13,14,15,16],
[1,5,9,13],[2,6,10,14],[3,7,11,15],[4,8,12,16],
[-1,-2],[-1,-3],[-1,-4],[-1,-5],[-1,-6],[-1,-9],[-1,-11],[-1,-13],[-1,-16],
[-2,-3],[-2,-4],[-2,-5],[-2,-6],[-2,-7],[-2,-10],[-2,-12],[-2,-14],[-3,-4],
[-3,-6],[-3,-7],[-3,-8],[-3,-9],[-3,-11],[-3,-15],[-4,-7],[-4,-8],[-4,-10],
[-4,-12],[-4,-13],[-4,-16],[-5,-6],[-5,-7],[-5,-8],[-5,-9],[-5,-10],[-5,-13],
[-5,-15],[-6,-7],[-6,-8],[-6,-9],[-6,-10],[-6,-11],[-6,-14],[-6,-16],[-7,-8],
[-7,-10],[-7,-11],[-7,-12],[-7,-13],[-7,-15],[-8,-11],[-8,-12],[-8,-14],
[-8,-16],[-9,-10],[-9,-11],[-9,-12],[-9,-13],[-9,-14],[-10,-11],[-10,-12],
[-10,-13],[-10,-14],[-10,-15],[-11,-12],[-11,-14],[-11,-15],[-11,-16],
[-12,-15],[-12,-16],[-13,-14],[-13,-15],[-13,-16],[-14,-15],[-14,-16],[-15,-16]]
```

DPLL liefert Modell: `[-13,-16,15,9,-11,-14,-12,-10,8,-7,-6,-5,-4,-3,2,-1]`

Tatsächlich gibt es zwei Modelle:

```
*DPexamples> davisPutnamAlle (generate_nqueens 4)
[[-13,-16,15,9,-11,-14,-12,-10,8,-7,-6,-5,-4,-3,2,-1],
 [-15,-13,-9,-8,-6,-4,-2,-1,5,12,14,3,-16,-10,-7,-11]]
```

Nützliche Generatoren: Mindestens eine wahr

Sei $S = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln.

$$at\_least\_one(S) = (F_1 \lor \ldots \lor F_n)$$

Z.B. $at\_least\_one(\{X_1, X_2, X_3\}) = \quad (X_1 \lor X_2 \lor X_3)$

Nützliche Generatoren: Höchstens eine wahr

Sei $S = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln.

$$at\_most\_one(S) = \bigwedge\{(\neg F_i \vee \neg F_j) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\}$$

Z.B.

$$\begin{aligned} at\_most\_one(\{X_1, X_2, X_3\}) = \quad & (\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_1) \\ & \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \end{aligned}$$

Nützliche Generatoren: Höchstens eine wahr

Sei $S = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln.

$$at\_most\_one(S) = \bigwedge\{(\neg F_i \vee \neg F_j) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\}$$

Z.B.

$$\begin{aligned} at\_most\_one(\{X_1, X_2, X_3\}) = \quad & (\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_1) \\ & \wedge(\neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \end{aligned}$$

Beachte: Man kann noch optimieren (Symmetrien entfernen):

$$at\_most\_one(S) = \bigwedge\{(\neg F_i \vee \neg F_j) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j\}$$

Z.B.

$$at\_most\_one(\{X_1, X_2, X_3\}) = \quad (\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$$

Nützliche Generatoren: Genau eine wahr

Sei $S = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln.

$$exactly\_one(S) = at\_least\_one(S) \land at\_most\_one(S)$$

Z.B.

$$\begin{aligned}
at_least_one(\{X_1, X_2, X_3\}) &= (X_1 \lor X_2 \lor X_3) \\
at_most_one(\{X_1, X_2, X_3\}) &= (\neg X_1 \lor \neg X_2) \land (\neg X_1 \lor \neg X_3) \land (\neg X_2 \lor \neg X_3) \\
exactly_one(\{X_1, X_2, X_3\}) &= (X_1 \lor X_2 \lor X_3) \land \\
&\quad (\neg X_1 \lor \neg X_2) \land (\neg X_1 \lor \neg X_3) \land (\neg X_2 \lor \neg X_3)
\end{aligned}$$

Beispiel: Klausuren verteilen

- s Studenten schreiben Klausuren
- k Klausurtypen
- Paare von benachbart sitzenden Studenten gegeben
- Problem: Welcher Student bekommt welchen Klausurtyp
- So dass: Keine benachbarten Studenten bekommen gleiche Klausur

Kodiere in CNF, so dass Modell eine Zuordnung: Student $\leftrightarrow$ Klausurtyp liefert

Beispiel: Klausuren verteilen

s_i^j = Student i schreibt Klausurtyp j

$klausur\_formel(s, k, benachbart) =$

Jeder Student erhält genau eine Klausur:

$$\underbrace{\bigwedge_{i=1}^{s}}_{\text{alle Studenten}} \underbrace{exactly\_one(\{s_i^j \mid j \in \{1..k\}\})}_{\text{Student } i \text{ genau eine Klausur}}$$

Benachbarte Studenten, nicht die gleiche Klausur:

$$\wedge \bigwedge_{(a,b) \in benachbart} \bigwedge_{j=1}^{k} (\neg s_a^j \vee \neg s_b^j)$$

Verallgemeinerung: K aus N

- $at\_most(K, S)$: höchstens K viele Formeln aus S erfüllt
- $at\_least(K, S)$: mindestens K viele Formeln aus S erfüllt
- $exactly(K, S)$: genau K viele Formeln aus S erfüllt

Verallgemeinerung: K aus N

- $at\_most(K,S)$: höchstens K viele Formeln aus S erfüllt
- $at\_least(K,S)$: mindestens K viele Formeln aus S erfüllt
- $exactly(K,S)$: genau K viele Formeln aus S erfüllt

Vorarbeit: Alle Teilmengen der Mächtigkeit K

$$all\_subsets(S,K) = \{S' \subseteq S \mid |S'| = K\}$$

Z.B. Rekursive Berechnung:

$$\begin{array}{lcl} all\_subsets(S,0) & = & \{\{\}\} \\ all\_subsets(S,K) & = & \{S\}, \text{wenn } |S| = K \\ all\_subsets(\{s\} \dot\cup S, K) & = & all\_subsets(S,K) \\ & & \cup \{\{s\} \cup S' \mid S' \in all\_subsets(S, K-1)\} \end{array}$$

Höchstens K wahr

$$at\_most(K,S) = \bigwedge \left\{ \underbrace{\neg(\bigwedge S')}_{\text{nicht alle wahr}} \mid \underbrace{S'}_{K+1 \text{ Formeln}} \in all\_subsets(S, K+1) \right\}$$

$$= \bigwedge \left\{ \underbrace{\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_{k+1})}_{\text{nicht alle wahr}} \mid \{F_1, \ldots, F_{K+1}\} \in all\_subsets(S, K+1) \right\}$$

$$= \bigwedge \left\{ \underbrace{(\neg F_1 \vee \ldots \vee \neg F_{k+1})}_{\text{mind. 1 falsch}} \mid \{F_1, \ldots, F_{K+1}\} \in all\_subsets(S, K+1) \right\}$$

In CNF (wenn F_i Literale sind)

Mindestens K wahr

$$at\_least(K,S) = \bigvee \left\{ \underbrace{\bigwedge S'}_{K \text{ wahr}} \mid S' \in all\_subsets(S,K) \right\}$$

Z.B.

$$\begin{array}{rcl} at\_least(3,\{X_1,X_2,X_3,X_4\}) & = & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_4) \\ & & \vee (X_1 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \end{array}$$

Nachteil: Nicht in CNF (wenn S nur Literale enthält)

Mindestens K wahr (2)

$$\begin{array}{l} at\_least(K,S) \\ = at\_least\_one(S) \\ \quad \wedge \bigwedge \{f \Rightarrow \bigvee S' \mid f \in S, S' \in all\_subsets(S \setminus \{f\}, |S| - (K-1))\} \\ = at\_least\_one(S) \\ \quad \wedge \bigwedge \{\neg f \vee \bigvee S' \mid f \in S, S' \in all\_subsets(S \setminus \{f\}, |S| - (K-1))\} \end{array}$$

Idee dabei: mind. 1 Formel aus S wahr,
und wenn eine wahr, dann noch $K-1$ weitere wahr...
Z.B.

$$\begin{array}{l} at\_least(3, \{X_1, X_2, X_3, X_4\}) = \\ (X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \\ \wedge (X_1 \Rightarrow (X_2 \vee X_3)) \wedge (X_1 \Rightarrow (X_2 \vee X_4)) \wedge (X_1 \Rightarrow (X_3 \vee X_4)) \\ \wedge (X_2 \Rightarrow (X_1 \vee X_3)) \wedge (X_2 \Rightarrow (X_1 \vee X_4)) \wedge (X_2 \Rightarrow (X_3 \vee X_4)) \\ \wedge (X_3 \Rightarrow (X_1 \vee X_2)) \wedge (X_3 \Rightarrow (X_1 \vee X_4)) \wedge (X_3 \Rightarrow (X_2 \vee X_4)) \\ \wedge (X_4 \Rightarrow (X_1 \vee X_2)) \wedge (X_4 \Rightarrow (X_1 \vee X_3)) \wedge (X_4 \Rightarrow (X_2 \vee X_3)) \end{array}$$

Mindestens K wahr (2)

$$
\begin{aligned}
& at\_least(K, S) \\
& = at\_least\_one(S) \\
& \quad \wedge \bigwedge \{f \Rightarrow \bigvee S' \mid f \in S, S' \in all\_subsets(S \setminus \{f\}, |S| - (K-1))\} \\
& = at\_least\_one(S) \\
& \quad \wedge \bigwedge \{\neg f \vee \bigvee S' \mid f \in S, S' \in all\_subsets(S \setminus \{f\}, |S| - (K-1))\}
\end{aligned}
$$

Idee dabei: mind. 1 Formel aus S wahr,
und wenn eine wahr, dann noch $K-1$ weitere wahr...
Z.B.

$$
\begin{array}{l}
at\_least(3, \{X_1, X_2, X_3, X_4\}) = \\
(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \\
\wedge(\neg X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \wedge (\neg X_1 \vee (X_2 \vee X_4)) \wedge (\neg X_1 \vee (X_3 \vee X_4)) \\
\wedge(\neg X_2 \vee (X_1 \vee X_3)) \wedge (\neg X_2 \vee (X_1 \vee X_4)) \wedge (\neg X_2 \vee (X_3 \vee X_4)) \\
\wedge(\neg X_3 \vee (X_1 \vee X_2)) \wedge (\neg X_3 \vee (X_1 \vee X_4)) \wedge (\neg X_3 \vee (X_2 \vee X_4)) \\
\wedge(\neg X_4 \vee (X_1 \vee X_2)) \wedge (\neg X_4 \vee (X_1 \vee X_3)) \wedge (\neg X_4 \vee (X_2 \vee X_3))
\end{array}
$$

Genau K wahr

$$exactly(K,S) = at\_least(K,S) \wedge at\_most(K,S)$$

Beispiel: Logelei aus der Zeit

Tom, ein Biologiestudent, sitzt verzweifelt in der Klausur, denn er hat vergessen, das Kapitel über die Wolfswürmer zu lernen. Das Einzige, was er weiß, ist, dass es bei den Multiple-Choice-Aufgaben immer **genau 3 korrekte** Antworten gibt. Und dies sind die angebotenen Antworten:

a) Wolfswürmer werden oft von Igelwürmern gefressen.
b) Wolfswürmer meiden die Gesellschaft von Eselswürmern.
c) Wolfswürmer ernähren sich von Lammwürmern.
d) Wolfswürmer leben in der banesischen Tundra.
e) Wolfswürmer gehören zur Gattung der Hundswürmer.
f) Wolfswürmer sind grau gestreift.
g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.
k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.
l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

Können Sie Tom helfen, die richtigen Aussagen herauszufinden?

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,. . . ,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,. . . ,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B$ XOR E

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,. . . ,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B \text{ XOR } E$

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A \text{ XOR } D$

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,. . . ,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B$ XOR E

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A$ XOR D

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
$I \iff C$ XOR H

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,...,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B$ XOR E

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A$ XOR D

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
$I \iff C$ XOR H

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.
$J \iff F$ XOR I

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

A,B,...,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B \text{ XOR } E$

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A \text{ XOR } D$

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
$I \iff C \text{ XOR } H$

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.
$J \iff F \text{ XOR } I$

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.
$K \iff C \text{ XOR } D$

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

A,B,. . . ,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B$ XOR E

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A$ XOR D

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
$I \iff C$ XOR H

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.
$J \iff F$ XOR I

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.
$K \iff C$ XOR D

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.
$L \iff D$ XOR H

- genau 3 korrekte Antworten

Beispiel: Logelei aus der Zeit

A,B,...,L = entsprechende Aussage ist wahr

g) Genau eine der beiden Aussagen b) und e) ist richtig.
$G \iff B \text{ XOR } E$

h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.
$H \iff A \text{ XOR } D$

i) Genau eine der beiden Aussagen c) und h) ist richtig.
$I \iff C \text{ XOR } H$

j) Genau eine der beiden Aussagen f) und i) ist richtig.
$J \iff F \text{ XOR } I$

k) Genau eine der beiden Aussagen c) und d) ist richtig.
$K \iff C \text{ XOR } D$

l) Genau eine der beiden Aussagen d) und h) ist richtig.
$L \iff D \text{ XOR } H$

- genau 3 korrekte Antworten
  $exactly(3, \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\})$

Lösen mit DPLL

Direkte Kodierung mit 1,...,12 statt A,...,B ergibt:

```
*DPexamples> davisPutnam cwuermer
[-11,-10,-9,-7,-6,-5,-2,3,-12,-1,8,4]
```

D.h. 3,4,8 sind wahr = C,D,H sind wahr

c) Wolfswürmer ernähren sich von Lammwürmern.
d) Wolfswürmer leben in der banesischen Tundra.
h) Genau eine der beiden Aussagen a) und d) ist richtig.

Sudoku-Lösen mit DPLL

Sudoku:

		6	4		1	5		
		3	6	5				
5	8			2		6		
4	6		8					3
	3	5					2	
2					3	9	8	
9		1			5			
				4	6			5
			1				7	

Sudoku-Lösen mit DPLL

Sudoku:

7	9	6	4	8	1	5	3	2
1	2	3	6	5	9	8	4	7
5	8	4	3	2	7	6	9	1
4	6	9	8	1	2	7	4	3
8	3	5	7	9	4	1	2	6
2	1	7	5	6	3	9	8	4
9	4	1	2	7	5	3	6	8
3	7	8	9	4	6	2	1	5
6	5	2	1	3	8	4	7	9

Sudoku-Lösen mit DPLL

Sudoku:

7	9	6	4	8	1	5	3	2
1	2	3	6	5	9	8	4	7
5	8	4	3	2	7	6	9	1
4	6	9	8	1	2	7	4	3
8	3	5	7	9	4	1	2	6
2	1	7	5	6	3	9	8	4
9	4	1	2	7	5	3	6	8
3	7	8	9	4	6	2	1	5
6	5	2	1	3	8	4	7	9

Sudoku-Lösen mit DPLL

Sudoku:

7	9	6	4	8	1	5	3	2
1	2	3	6	5	9	8	4	7
5	8	4	3	2	7	6	9	1
4	6	9	8	1	2	7	4	3
8	3	5	7	9	4	1	2	6
2	1	7	5	6	3	9	8	4
9	4	1	2	7	5	3	6	8
3	7	8	9	4	6	2	1	5
6	5	2	1	3	8	4	7	9

Sudoku-Lösen mit DPLL

Sudoku:

7	9	6	4	8	1	5	3	2
1	2	3	6	5	9	8	4	7
5	8	4	3	2	7	6	9	1
4	6	9	8	1	2	7	4	3
8	3	5	7	9	4	1	2	6
2	1	7	5	6	3	9	8	4
9	4	1	2	7	5	3	6	8
3	7	8	9	4	6	2	1	5
6	5	2	1	3	8	4	7	9

Kodierung von Sudokus als Klauselmenge

- Direkt Ganzzahlen als Variablennamen
- Negative Zahlen = negierte Variable
- Dreistellige Zahlen $XYV \in \{111, 112, \ldots, 999\}$
- X = Zeile
- Y = Spalte
- V = Zahl die in der Zelle stehen kann in $\{1, \ldots, 9\}$
- D.h. pro Zelle 9 Variablen, von den genau eine Wahr sein muss
- Insgesamt 729 Variablen

Kodierung von Sudokus als Klauselmenge

Eingabe: Sudoku (teilweise gefüllt)

Erzeuge Klauselmenge:

$$\begin{aligned}\text{Klauselmenge} = \quad & \text{Startbelegung} \\ & \cup\ \text{FelderEindeutigBelegt} \\ & \cup\ \text{ZeilenBedingung} \\ & \cup\ \text{SpaltenBedingung} \\ & \cup\ \text{QuadratBedingung}\end{aligned}$$

Startbelegung:

- Gegebene Zahlen werden auf wahr gesetzt:
  Startbelegung: Wenn in Feld (x, y) die Zahl z steht:
  Füge 1-Klausel $\{xyz\}$ hinzu

Kodierung von Sudokus als Klauselmenge

$$\text{FelderEindeutigBelegt} = \bigwedge_{X=1}^{9} \bigwedge_{Y=1}^{9} exactly\_one(\{XY1, \ldots, XY9\})$$

$$\text{ZeilenBedingung} = \bigwedge_{X=1}^{9} \bigwedge_{V=1}^{9} at\_most\_one(\{X1V, \ldots, X9V\})$$

$$\text{SpaltenBedingung} = \bigwedge_{Y=1}^{9} \bigwedge_{V=1}^{9} at\_most\_one(\{1YV, \ldots, 9YV\})$$

Kodierung von Sudokus als Klauselmenge (2)

QuadratBedingung =

$$\bigwedge_{V=1}^{9}\left(\begin{array}{l}
at_most_one(\{11V,12V,13V,21V,22V,23V,31V,32V,33V\})\wedge\\
at_most_one(\{14V,15V,16V,24V,25V,26V,34V,35V,36V\})\wedge\\
at_most_one(\{17V,18V,19V,27V,28V,29V,37V,38V,39V\})\wedge\\
at_most_one(\{41V,42V,43V,51V,52V,53V,61V,62V,63V\})\wedge\\
at_most_one(\{44V,45V,46V,54V,55V,56V,64V,65V,66V\})\wedge\\
at_most_one(\{47V,48V,49V,57V,58V,59V,67V,68V,69V\})\wedge\\
at_most_one(\{71V,72V,73V,81V,82V,83V,91V,92V,93V\})\wedge\\
at_most_one(\{74V,75V,76V,84V,85V,86V,94V,95V,96V\})\wedge\\
at_most_one(\{77V,78V,79V,87V,88V,89V,97V,98V,99V\})
\end{array}\right)$$