Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung

Modallogik

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

SoSe 2022

Stand der Folien: 31. Mai 2022

Modallogik (aussagenlogisch)

Zur Formulierung und Repräsentation von Aussagen,
die über die Aussagenlogik hinausgehen.
Meist „modale“ Einschränkung.

„Bald wird es regnen“
„Möglicherweise ist die Erde eine Kugel“ .
„Ich weiß, dass es niemand gibt, der alles weiß “ .
„Es ist verboten, bei roter Ampel über die Kreuzung zu fahren “

(Es gibt auch modallogische Erweiterungen der Prädikatenlogik.)

Modallogik (aussagenlogisch)

Einfachste Variante:

Aussagenlogik und extra Operatoren $\Diamond, \Box$ auf Formeln:

$\Box$	$\Diamond$	
„$\forall$ “	„$\exists$ “	
Immer gilt:	Irgendwann gilt:	(temporal)
Es ist notwendigerweise:	Es ist möglich:	(modal)
Es ist geboten:	Es ist erlaubt:	(deontic)

Erweiterungen

- Simultan mehrere (auch parametrisierte) Operatoren $\Box_A, \Box_B, \Diamond_C$: A glaubt ..., B glaubt ..., C hält für möglich ...
- Prädikatenlogik mit Modaloperatoren

Logikformalismen: Beispiele und Motivation

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

philosophische Logik

untersucht u.a. Modallogik und Varianten

Fragestellung der philosophischen Logik:

Welche Repräsentation?
Welche Ableitungsverfahren?
sind richtig?
für welche Zwecke/Fragestellungen?

Z.B. „wenn es nicht regnet, dann Radfahren möglich."
„Wenn Aussage T beweisbar ist, dann ist sie auch gültig."

(„nichtmonotone" Logik gibt es auch, betrachten wir hier nicht)

Logikformalismen: Modellierung der Zeit

$\boxed{\text{Diskrete Zeit}}$

Operatoren: „vorher“, „nachher“, „immer“, „manchmal“ usw.

$\Box F$: F gilt immer in der Zukunft

$\Diamond F$: F gilt irgendwann in der Zukunft.

In dieser Modellierung sollte gelten:

$$\Box\Box F \iff \Box F$$

lineare Zeit: deterministische Prozesse

Dann gilt: $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

verzweigende Zeit: nicht-deterministische Prozesse:

gilt nicht mehr: $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

Bemerkungen zu CTL*, CTL, LTL

Logik CTL* (computation tree logic):
ist Verallgemeinerung einer Modallogik zu verzweigender Zeit mit Anwendung in Hardwareverifikation.
Spezialisierung: LTL: linear time logic.

Modallogik	CTL
Welten	Welten (Zustände)
Erreichbarkeit (nächste Welt)	Erreichbarkeits-Pfade
	Es gibt keine Endwelt

Logik des Erlaubten und Verbotenen (Normative Logik, Deontic Logic)

Aus Wikipedia: „Deontische Logik ist der Bereich der Logik, der die logischen Verhältnisse von Begriffen, die sich auf das Sollen beziehen, untersucht. Begriffe, die sich auf das Sollen beziehen, sind Gebot, Verbot, Erlaubnis und andere mehr."

$\Box F$: F ist geboten; F muss gelten; bzw. F ist obligatorisch.
$\Diamond F$: F ist erlaubt.

In dieser Logik sollte gelten, dass obligatorisches auch erlaubt sein sollte. D.h. das Axiom:

$$\Box F \implies \Diamond F$$

Logik des Wissens (epistemische Logik)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

$\Box F$: F ist bekannt.
$\Diamond F$: F ist glaubhaft.

bekannte Fakten sind richtig: D.h.

$$\Box F \implies F$$

ist ein extra Axiom dieser Logikvariante

Dieses Axiom ist falsch in einer Zeitlogik mit
$\Box =$ im nächsten Zustand

Variante einer Logik des Wissens (autoepistemische Logik)

Glauben an gewisse Fakten.

$\Box F$: F wird geglaubt.

$\Diamond F$: F ist möglich ($\neg F$ wird nicht geglaubt).

Die Axiome dazu:

$\Box(F \implies G)$	$\implies$	$(\Box F \implies \Box G)$	(Axiom K)
$\Box F$	$\implies$	$\Box\Box F$	positive Introspektion
$\neg\Box F$	$\implies$	$\Box(\neg\Box F)$	negative Introspektion

parametrisierte Modaloperatoren in einer Logik des Wissens mit mehreren Akteuren:

$\boxed{\text{A}}\ F$	A weiß, dass F gilt
$\boxed{\text{A}}\ (\neg \boxed{\text{B}}\ F)$	A weiß, dass B nicht weiß, dass F wahr ist.

Extremfall: *dynamische Logik* zur Programmverifikation.

z.B. $\boxed{\text{P}} F$: nach (jeder) Ausführung des Programms P gilt, falls das Programm terminiert, die Formel F.

Syntax

Semantik

Tautologien

Folgerungen

Syntax der aussagenlogischen Modallogik

Syntax: wie Aussagenlogik
Und zwei einstellige Modal-Operatoren $\Box$ und $\Diamond$;

Zur Grammatik kommt hinzu:

$$F ::= \Box F \mid \Diamond F \qquad \text{(auch geschachtelt)}$$

Beispiel $\Box((\Diamond X) \vee Y)$

Achtung: $\Box$ und $\Diamond$ sind nicht wahrheitsfunktional.
D.h. es gibt keine Wahrheitstafel für $\Box$ und $\Diamond$.

(Bedeutung s.u.)

Kripke-Semantik

(benannt nach Saul Aaron Kripke, US-Logiker und Philosoph)

Modallogische Semantik:
benötigt strukturierte Menge von aussagenlogischen Interpretationen.

möglichen Welten (Interpretationen)	Menge W
Erreichbarkeitsrelation R	binäre Relation auf W
Kripke-Rahmen (Kripke-Frame)	Paar (W, R)
Kripke-Struktur	Tripel (W, R, I) für $w \in W$ ist $I(w)$ eine aussagenlogische Interpretation

Semantik, Gültigkeit

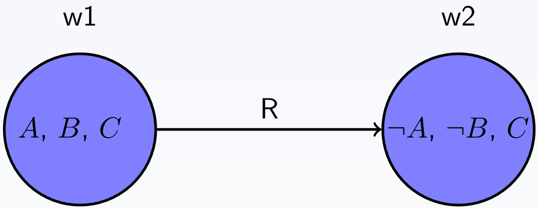
Bei fester Kripkestruktur (W, R, I):
definiert man $\models$ bzgl dieser Kripkestruktur. (eigentlich $\models_K$)
Sei $w \in W$

$$
\begin{array}{lll}
w \models 1 & & \\
w \not\models 0 & & \\
w \models A & \text{gdw.} & I(w)(A) \text{ für die Variable } A \\
w \models F \vee G & \text{gdw.} & w \models F \text{ oder } w \models G \\
w \models F \wedge G & \text{gdw.} & w \models F \text{ und } w \models G \\
w \models F \implies G & \text{gdw.} & \text{nicht } (w \models F) \text{ oder } w \models G \\
w \models \neg F & \text{gdw.} & \text{nicht } w \models F \\
w \models \Box F & \text{gdw.} & \forall w' : w \; R \; w' \implies w' \models F \\
w \models \Diamond F & \text{gdw.} & \exists w' : w \; R \; w' \wedge w' \models F
\end{array}
$$

Gültigkeit einer Formel

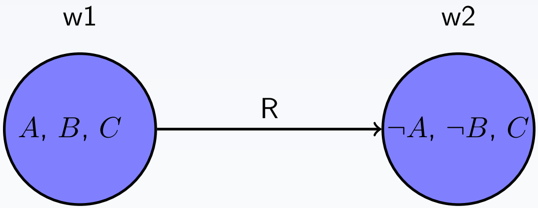
F gültig in $K = (W, R, I)$,	falls für alle $w \in W$: $w \models F$. Notation: $K \models F$.
F *Tautologie*,	falls für alle $K = (W, R, I)$: $K \models F$.
F *erfüllbar*,	falls es ein $K = (W, R, I)$ gibt mit: $K \models F$.
F *gültig im Kripke-Rahmen* (W, R),	falls für alle I gilt: $(W, R, I) \models F$.

Kripke-Struktur Beispiel



Formel	w1	w2
A	1	0
$\Box A$	0	1
$\Diamond A$	0	0
$\Diamond C$	1	0

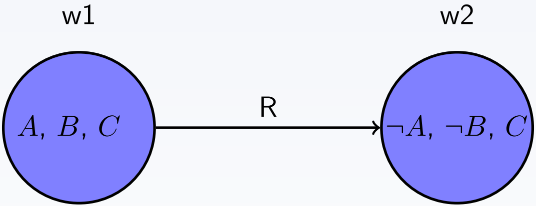
Kripke-Struktur Beispiel



Formel	w1	w2
A	1	0
$\Box A$	0	1
$\Diamond A$	0	0
$\Diamond C$	1	0

Formel	w1	w2
$A \implies \Box A$	0	1
$C \implies \Box C$	1	1
$\Box\Box A$	1	1
$\Box 0$	0	1

Kripke-Struktur Beispiel



Formel	w1	w2

Formel	w1	w2

Kripkesemantik

Semantische Folgerung, Deduktionstheorem

F ist **semantische Folgerung** (logische Konsequenz)
von $\{F_1, \ldots, F_n\}$,
falls für alle Kripke-Strukturen K gilt:

Wenn $K \models \{F_1, \ldots, F_n\}$, dann auch $K \models F$.

Notation: $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$.

Beachte: das Kriterium für $\models$ sind Kripkestrukturen, nicht Welten.

Deduktionstheorem in Modallogik

Es gibt (inhaltlich) verschiedene Formulierungen:

- $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$ ist äquivalent zu
  $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \implies F$ ist Tautologie.

  (Gilt in der aussagenlogischen Modallogik)
- $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash F$ ist äquivalent zu
  $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \implies F$ ist Tautologie.

  (Gilt nicht in der aussagenlogischen Modallogik mit Standardherleitung.)

Deduktionstheorem gilt nicht

In der Modallogik gilt das Deduktionstheorem **nicht**:
Es gilt:
Wenn $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \implies F$ Tautologie,
dann gilt auch $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$
Aber Umkehrung ist falsch:

$\Diamond X \models \Diamond\Diamond X$ gilt immer:
Sei K Kripkestruktur mit $K \models \Diamond X$.
zu w_1 ex w_2 mit $w_2 \models X$ und zu w_2 ex w_3 mit $w_3 \models X$
Also: $K \models \Diamond\Diamond X$

$\Diamond X \implies \Diamond\Diamond X$ ist keine Tautologie
Gegenbeispiel K besteht aus genau zwei Welten w_1, w_2, mit $w_1 \; R \; w_2$, aber keine Relation R für w_2, wobei $w_1 \not\models X$, und $w_2 \models X$.
Dann gilt: $w_1 \models \Diamond X$, aber es gibt keine Welt, die von w_1 aus in zwei Schritten erreichbar ist. Also ist $\Diamond\Diamond X$ falsch in w_1.

Beispiele für Aussagen

Lemma Wenn F eine Tautologie, dann ist auch $\Box F$ eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel: $\frac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)

Beispiele für Aussagen

Lemma Wenn F eine Tautologie, dann ist auch $\Box F$ eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel: $\dfrac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)

Aber $F \implies \Box F$ ist i.a. keine Tautologie.

Beispiele für Aussagen

- $\Box 0$ bzgl einer Welt w bedeutet, dass es eine Sackgasse ist:
  von w aus ist keine Welt mehr erreichbar, denn in keiner Interpretation ist 0 wahr.
- Wenn $\Box\Box\Box 0$ in einer Welt w wahr ist, dann bedeutet das, dass man von w aus höchstens 2 R-Schritte machen kann.
- $\Box 1$ ist immer eine Tautologie

Äquivalenzen und Nichtäquivalenzen

Alle aussagenlogischen Tautologien gelten und:

$$
\begin{array}{lcl}
\Box(F \land G) & \iff & \Box F \land \Box G \\
\Diamond(F \lor G) & \iff & \Diamond F \lor \Diamond G \\
\neg(\Box F) & \iff & \Diamond(\neg F) \\
\neg(\Diamond F) & \iff & \Box(\neg F) \\
\Box(F \implies G) & \implies & (\Box F \implies \Box G)
\end{array}
$$

Nicht äquivalent bzgl. aller Kripke-Strukturen (d.h. K) sind:

$$
\begin{array}{lcl}
\Diamond(F \land G) & \text{und} & \Diamond F \land \Diamond G \\
\Box(F \lor G) & \text{und} & \Box F \lor \Box G
\end{array}
$$

Modallogik: Folgerungssysteme

Prüfung von Tautologien ist nicht ausreichend! Also braucht man:

Folgerungssystem für normale Modallogiken

Gegeben $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, dann sind herleitbar:

1. Alle aus $\mathcal{F}$ aussagenlogisch herleitbaren Formeln.
2. Formeln, die durch Transformationen wie $\neg\Diamond F \iff \Box\neg F$ aus Formeln aus $\mathcal{F}$ entstehen.
3. Notwendigkeitseinführung: Wenn $F \in \mathcal{F}$, und F wurde nur aus Tautologien (genauer aus dem leeren Anfangs-$\mathcal{F}$) hergeleitet, dann kann man $\Box F$ herleiten.
4. (Axiom K): Wenn $\Box(F \implies G) \in \mathcal{F}$, dann kann man $(\Box F \implies \Box G)$ herleiten.
5. **Beweis durch Widerspruch**:
   Wenn man aus $\mathcal{F} \cup \{G\}$ einen Widerspruch herleiten kann, dann kann man $\neg G$ aus $\mathcal{F}$ herleiten.
   z.B. $\Diamond 0$ ist ein Widerspruch, da Negation der Tautologie $\Box 1$.

Fragen: korrekt?, vollständig? Komplexität?

Modallogik: Folgerungssysteme

Das obige Folgerungssystem erlaubt auch zu folgern

- Alle Tautologien der Modallogik K.
  (Der Nachweis ist nicht ganz einfach.)
- Zum Beispiel:
  $(\Box F) \land (\Box G) \iff \Box(F \land G)$
  und
  $\Box 1$.
- Widersprüche sind alle Negationen von Tautologien, z.B. auch:
  $\Diamond 0$ als Negation von $\Box 1$.

Modallogik: Folgerungssysteme

- Ist das Folgerungssystem vollständig für K?
  vermutlich ja.
- jedenfalls reicht es aus, um z.B. die richtigen Folgerungen im Beispiel der drei Weisen zu ziehen:

Modallogik: Folgerungssysteme

- Folgerungssysteme für andere Varianten der Modallogik:
- Weitere bzw. andere Folgerungsregeln
- Benötigen andere Axiome statt K bzw. zusätzliche Axiome
- Hierzu gibt es viele Untersuchungen
- Frage : welche Logik passt zu welcher Anwendung?

Modallogik: Folgerungssysteme

- Folgerungssysteme für andere Varianten der Modallogik:
- Weitere bzw. andere Folgerungsregeln
- Benötigen andere Axiome statt K bzw. zusätzliche Axiome
- Hierzu gibt es viele Untersuchungen
- Frage : welche Logik passt zu welcher Anwendung?

Beispiel: Drei Weisen

Drei Weise sitzen sich gegenüber, so dass jeder den anderen von vorne sieht. Jedem wird ein roter oder blauer Punkt auf die Stirn gemalt. Mindestens einer der Punkte ist rot, was den Weisen bekannt ist. Jeder sieht die Stirn der anderen aber nicht seine eigene.
Nach einer Zeit des Überlegens sagt der erste Weise: „ Ich weiß nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat."
Nach weiterem Überlegen sagt der zweite Weise: „ Ich weiß auch nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat."
Kurz danach sagt der dritte Weise: „ Jetzt weiß ich, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat".
Wie kommt er zu dem Schluss und welche Farbe ist es?

Beispiel: Drei Weisen

RA: „A hat roten Punkt“, RB: „B hat roten Punkt“,
RC: „C hat roten Punkt“.

Formeln:

$$\begin{array}{lcl}
RA \lor RB \lor RC & & \\
RA & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{B}} RA) \land (\boxed{\mathsf{C}} RA) \\
\neg RA & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{B}} \neg RA) \land (\boxed{\mathsf{C}} \neg RA) \\
RB & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}} RB) \land (\boxed{\mathsf{C}} RB) \\
\neg RB & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}} \neg RB) \land (\boxed{\mathsf{C}} \neg RB) \\
RC & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}} RC) \land (\boxed{\mathsf{B}} RC) \\
\neg RC & \Longrightarrow & (\boxed{\mathsf{A}} \neg RC) \land (\boxed{\mathsf{B}} \neg RC)
\end{array}$$

Aussagen

$\neg\boxed{\mathsf{A}} RA$ (A kennt die Farbe seines Punktes nicht.)

$\neg\boxed{\mathsf{B}} RB$ (B kennt die Farbe seines Punktes nicht.)

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{\text{C}}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$. Aus Axiomen: $\boxed{\text{A}}\neg RB$ und $\boxed{\text{A}}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{\text{A}}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{\text{A}}RA$,
im Widerspruch zu $\neg\boxed{\text{A}}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{C}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$. Aus Axiomen: $\boxed{A}\neg RB$ und $\boxed{A}\neg RC$.
Da auch ($\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC)$) gilt, folgt $\boxed{A}RA$,
im Widerspruch zu $\neg\boxed{A}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Insbesondere kann man jetzt herleiten: $\boxed{B}(RB \vee RC)$.
Das ist das gleiche wie $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{C}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$. Aus Axiomen: $\boxed{A}\neg RB$ und $\boxed{A}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{A}RA$,
im Widerspruch zu $\neg\boxed{A}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Insbesondere kann man jetzt herleiten: $\boxed{B}(RB \vee RC)$.
Das ist das gleiche wie $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$.

Nächster Widerspruchsbeweis:
Angenommen $\neg RC$ gilt. Dann kann man herleiten: $\boxed{B}\neg RC$,
und damit $\boxed{B}RB$, im Widerspruch zu $\neg\boxed{B}RB$.
Also ist RC hergeleitet durch Widerspruch.

Beispiel: Herleitung zu $\boxed{C}$ und RC

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\neg RB \wedge \neg RC$. Aus Axiomen: $\boxed{A}\neg RB$ und $\boxed{A}\neg RC$.
Da auch $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$ gilt, folgt $\boxed{A}RA$,
im Widerspruch zu $\neg\boxed{A}RA$.
Also gilt $RB \vee RC$.

Insbesondere kann man jetzt herleiten: $\boxed{B}(RB \vee RC)$.
Das ist das gleiche wie $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$.

Nächster Widerspruchsbeweis:
Angenommen $\neg RC$ gilt. Dann kann man herleiten: $\boxed{B}\neg RC$,
und damit $\boxed{B}RB$, im Widerspruch zu $\neg\boxed{B}RB$.
Also ist RC hergeleitet durch Widerspruch.

Damit gilt auch $\boxed{C}RC$.

Mult-Modallogik: Beispiel

Kalendereintrag 14.6.2021

Zwei natürliche Zahlen a, b, $2 \leq a \leq b$.

1. Susi und Paul kennen a, b nicht.
2. Susi kennt die Summe $a + b$
3. Paul kennt das Produkt $a * b$

Dann folgende Aussagen in dieser Reihenfolge:

1. Susi: „ich weiß nicht was a und b ist. “
2. Paul: „ich weiß nicht was a und b ist. “
3. Susi: „Aha, jetzt weiss ich was a und b ist. “
4. Paul: „Aha, jetzt weiss ich auch was a und b ist. “

Darstellung in Multi-Modallogik?

Mult-Modallogik: Beispiel

1. Susi und Paul kennen a, b nicht.
2. Susi kennt das Produkt $a + b$
3. Paul kennt das Produkt $a * b$

Und dann:

1. $(\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b$
2. $(\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b$
3. $\boxed{\text{Susi}} ((\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b)$
4. $\implies \boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b$
5. $\boxed{\text{Paul}} ((\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b)$ und
   $\boxed{\text{Paul}} (\boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b)$
6. $\implies \boxed{\text{Paul}} a \wedge \boxed{\text{Paul}} b$

Was ist die Lösung?

Modallogik: Leerblatt

Modallogik: Rahmen-Axiome

Charakterisierung einer Logik durch Rahmenaxiome:

Man definiert Modallogikvarianten mittels Eigenschaften der zulässigen Kripke-Rahmen.

Meist sind das Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation.

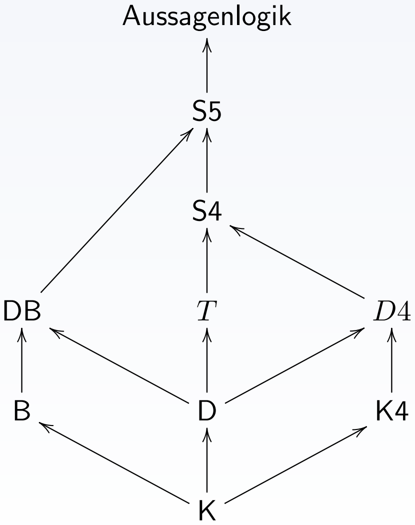
Modallogik: Rahmen-Axiome

Name der Modallogik (des Axioms)	Eigenschaft der Relation im Rahmen (W, R)
K	R ist beliebig
T	R ist reflexiv
K4	R ist transitiv
S4	R ist reflexiv und transitiv
B	R ist reflexiv und symmetrisch
S5	R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch
5	R ist euklidisch
D	R ist seriell (unbeschränkt)
D4	R ist seriell und transitiv
S4.2	R ist reflexiv, transitiv und konfluent
Grz	R: jede unendliche R-Kette $w_1 \ R \ w_2 \ldots$ hat nur endliche viele w_i.
Aussagenlogik	es gibt genau eine Welt w_0, und $w_0 \ R \ w_0$ gilt

Relations-Eigenschaften

reflexiv	$\forall w : R(w,w)$
transitiv	$\forall w_1, w_2, w_3 : w_1\ R\ w_2 \land w_2\ R\ w_3 \implies w_1\ R\ w_3$
symmetrisch	$\forall w_1, w_2 : w_1\ R\ w_2 \implies w_2\ R\ w_1$
seriell	$\forall w \exists w' : w\ R\ w'$
euklidisch	$\forall w_1, w_2, w_3 : w_1\ R\ w_2 \land w_1\ R\ w_3 \implies (w_2\ R\ w_3)$
konfluent	(falls R reflexiv und transitiv)
	$\forall w_1, w_2, w_3 : (w_1\ R\ w_2 \land w_1\ R\ w_3)$
	$\implies (\exists w_4 : w_2\ R\ w_4) \land w_3\ R\ w_4$

Abhängigkeiten zwischen den Logiken



Axiomenschemata

Name (alt. N)	Formel (Rahmenaxiom)	Anwendung
K	$\Box(F \implies G) \implies (\Box F \implies \Box G)$	
T (M)	$\Box F \implies F$	epistemisch
D	$\Box F \implies \Diamond F$	deontisch
4	$\Box F \implies \Box\Box F$	Zeit; Wissen
B	$F \implies \Box\Diamond F$	
5 (E)	$\Diamond F \implies \Box\Diamond F$	Wissen
M (G)	$\Box\Diamond F \implies \Diamond\Box F$	
L (H, Lem0)	$\Box((A \wedge \Box A) \implies B) \vee$	
	$\Box((B \wedge \Box B) \implies A)$	
3 $(H, H_0^+$,Lem)	$\Box(\Box A \implies B) \vee \Box(\Box B \implies A)$	
2 (G)	$\Diamond\Box F \implies \Box\Diamond F$	
G (W)	$\Box(\Box F \implies F) \implies \Box F$	
Dum	$\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F)$	
	$\implies (\Diamond\Box F \implies \Box F)$	
Grz	$\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F) \implies F)$	

Axiomenschemata: Erläuterungen

epistemische und deontische Logiken

Name	Formel	Erklärung
T	$\Box F \implies F$	Was ich weiss, das gilt
D	$\Box F \implies \Diamond F$	
	$\Box F \implies \neg\Box\neg F$	Wenn ich F glaube, dann glaube ich das Gegenteil nicht
4	$\Box F \implies \Box\Box F$	Wenn ich F weiß, dann weiß ich dass ich F weiß (Positive Introspektion)
5	$\Diamond F \implies \Box\Diamond F$	
	$\neg\Box F \implies \Box\neg\Box F$	wenn ich F nicht weiß, dann weiß ich dass ich F nicht weiß. (Negative Introspektion)

(Axiome sind teilweise umgeformt)