GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung

Prädikatenlogik

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

SoSe 2021

Ersatz: 19.5. Mittwoch 16^{00}

Stand der Folien: 10. Mai 2021

Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik nicht ausdrückbar:

- Beziehungen zwischen bestimmten Objekten
- Eigenschaft P gilt für ein Objekt
- Die Eigenschaft P gilt für alle Objekte
- Existenz von Objekten fmit bestimmten Eigenschaften

Aber ausdrückbar in der **Prädikatenlogik**

Stufen

PL$_i$: Prädikatenlogik i.Stufe

- **PL**$_0$: Keine Quantoren erlaubt $=$ Aussagenlogik
- **PL**$_1$: Quantifizieren über Individuen z.B. $\forall x.P(x)$
- **PL**$_2$: Quantifizieren über Beziehungen (Funktionssymbole) und Prädikate z.B. $\forall P.\forall f.\forall x.P(f(x))$
- **PL**$_3$: Quantifizieren über Eigenschaften von Eigenschaften
- ...

Wir betrachten nur: **PL**$_1$

PL_1

Wie in jeder Logik:

- **Syntax**: Syntaktische gültige Formeln (formale Sprache)
- **Semantik**: Bedeutung (Interpretation) der Formeln
  (Sätze,Erfüllbarkeit,. . .)

Definition ist in PL_1 etwas aufwändiger als in der Aussagenlogik

Beispiele für PL_1-Formeln

Präd P P

$$\forall x : Planet(x) \Rightarrow (\exists y : Sonne(y) \land umkreist(x, y))$$

$$\forall x : Planet(x) \Rightarrow \neg(Sonne(x))$$

$$\exists(x) : Planet(x)$$

F

$$\forall x : Sonne(x) \Rightarrow umkreist(\underline{innersterPlanet(x)}, x))$$

$$\forall x : Sonne(x) \lor Planet(x)$$

zug-Sonne(x) = y

F

Syntax von PL_1: Signaturen

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, wobei

- $\mathcal{F}$ Menge der **Funktionssymbole**
- $\mathcal{P}$ Menge der **Prädikatensymbole**
- die Mengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{P}$ sind disjunkt
- jedes $f \in \mathcal{F}$ und jedes $P \in \mathcal{P}$ hat eine **Stelligkeit** $arity(f) \geq 0$ bzw. $arity(P) \geq 0$

Konstanten: $f \in \mathcal{F}$ mit $arity(f) = 0$

Forderung: mind. eine Konstante in $\mathcal{F}$

Syntax von PL_1: Terme

Prädikatenlogische Terme $T(\Sigma, V)$

- V abzählbar unendliche Menge von Variablen
- $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ Signatur

$T(\Sigma, V)$ ist induktiv definiert durch

- für alle $x \in V$: $x \in T(\Sigma, V)$
- Wenn
  - $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$
  - $f \in \mathcal{F}$ mit $arity(f) = n$

  dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, V)$

Beispiel: $f(g(x, a), y, z)$

(wenn $arity(f) = 3$, $arity(g) = 2$, $arity(a) = 0$ und $x, y, z \in V$)

PL$_1$: Syntax von Formeln

Formeln: $F(\Sigma, V)$ induktiv definiert über $\Sigma(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variablen V

- Prädikatenlogische Atome: Wenn
  - $P \in \mathcal{P}$ mit $arity(P) = n$,
  - $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$

  dann $P(t_1, \ldots t_n) \in F(\Sigma, V)$
- Komplexe Formeln: Falls $F, G \in F(\Sigma, V)$, $x \in V$, dann auch:
  - $(\neg F)$
  - $(F \vee G)$
  - $(F \wedge G)$
  - $(F \Rightarrow G)$
  - $(F \Leftrightarrow G)$
  - $(\forall x : \ F)$
  - $(\exists x : \ F)$

  in $F(\Sigma, V)$

$P(\forall f)$ Unsinn

PL_1: Abkürzungen

- $\forall x_1, \ldots, x_n : F = \forall x_1 : (\forall x_2 : (\ldots(\forall x_n.F)))$
- $\exists x_1, \ldots, x_n : F = \exists x_1 : (\exists x_2 : (\ldots(\exists x_n.F)))$
- Klammern lassen wir gem. den üblichen Regeln weg
- Konstantensymbole: Schreibweise a statt $a()$
- Wir verwenden auch true und false

$0, 1 \mid \perp \quad \top$

Notation

- Variablen u, v, w, x, y, z
- Konstanten a, b, c, d, e
- Mehrstellige Funktionssymbole f, g, h
- Prädikatensymbole P, Q, R, T

Beispiel

Signatur $\Sigma := (\underbrace{\{a, b, f, g\}}_{\mathcal{F}}, \underbrace{\{P, Q, R\}}_{\mathcal{P}})$ mit

$$
\begin{aligned}
arity(a) &= arity(b) = arity(P) = 0,\\
arity(f) &= arity(Q) = 1,\\
arity(g) &= arity(R) = 2
\end{aligned}
$$

Variablen $V = \{x, y, z, \ldots\}$

Terme $T(\Sigma, V) =$

$x, y, z, \ldots,$

$a, b, f(a), f(b), f(x), \ldots$

$g(a,a), g(a,b), g(a, f(a)), \ldots$

$f(f(a)), f(f(b)), \ldots f(g(a,a)), \ldots$

$g(f(f(a)), a), \ldots$

$\ldots$

Formeln $F(\Sigma, V) =$

$P, Q(a), Q(b), Q(x), \ldots$

$R(a,a), \ldots R(a,b), \ldots$

$\neg P, \neg Q(a), \ldots$

$P \wedge Q(a), P \wedge \neg Q(a), \ldots$

$P \vee Q(a), P \vee \neg Q(a), \ldots$

$P \Rightarrow Q(a), P \Leftrightarrow \neg Q(a), \ldots$

$\forall x: \ Q(x), \ldots$

$\forall x$ $\exists x: \ R(x,y) \Rightarrow Q(x), \ldots$

Binder, Geltungsbereiche, Skopus

- $\forall x. \dots$ und $\exists x. \dots$ **binden** die Variable x
- Geltungsbereich (Skopus, **scope**) von x in $\forall x.F$ (bzw. $\exists x.F$) ist F
- Bindungsbereich reicht soweit wie möglich (Konvention)
- Bei mehreren Bindern: Der innerste Bindungsbereich zählt
  Beispiel: $\exists x.(Q(x) \lor \forall x.P(x))$ $\overset{?}{\leftarrow}$ #
- Variablen außerhalb eines Skopus: **freie Variable**

FV = Menge der freien Variablen, Beispiele:

- $FV(x) = FV(f(x)) = FV(g(x, g(x, a))) = \{x\}$
- $FV(P(x) \land Q(y)) = \{x, y\}$
- $FV(\exists x : R(x, y)) = \{y\}$.

Umbenennung

Gebundene Variablen darf man **umbenennen**

Beispiel: $\exists x.Q(x) \vee \forall x.P(x) = \exists x_1.Q(x_1) \vee \forall x_2.P(x_2)$

Aber: Dabei keine freien Variablen **einfangen**

$\forall x.P(z) \neq \forall z.P(z)$

$\exists z : \forall x : P(z)$

$\neq$ Falsch

$\exists z : \forall z : P(z)$

Freie Variablen darf man **nicht** umbenennen!

Sprechweisen in PL_1

- **Atom:** Formel der Art $P(t_1, \ldots t_n)$, wobei $P \in \mathcal{P}$ und $t_i \in T(\Sigma, V)$
- **Literal:** Atom oder ein negiertes Atom (z.B. $P(a)$ und $\neg P(f(a, x))$)
- **Grundterm:** Term $t \in T(\Sigma, V)$ ohne Variablensymbole, d.h. $FV(t) = \emptyset$
- **Grundatom:** Atom F ohne Variablensymbole, d.h. $FV(F) = \emptyset$
- **geschlossene Formel:** Formel F ohne freie Variablen, d.h. $FV(F) = \emptyset$
- **Klausel:** geschlossene Formel F mit einem Quantorpräfix nur aus Allquantoren
  d.h $F = \forall x_1, \ldots, x_n : F'$ und F' ist eine Disjunktionen von Literalen.

Semantik: Interpretation

Tarski

Beachte: Semantische Wahrheitswerte sind 0 und 1 (falsch und wahr)

Interpretation

Eine **Interpretation** $I = (S, I_V)$ mit $S = (D_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{P}_S)$ besteht aus:

- nichtleere Menge D_S (**Trägermenge**)
- $\mathcal{F}_S$ = Interpretation jedes $f \in \mathcal{F}$ als $arity(f)$-stellige **totale Funktion** f_S **über** D_S
- $\mathcal{P}_S$ = Interpretation jedes $P \in \mathcal{P}$ als $arity(P)$-stellige **Relation** P_S **über** D (Ausnahme: 0-stelliges P: wird entweder als 0 oder 1 interpretiert)
- Variablenbelegung $I_V : V \to D_S$

Semantik: Beispiel

$Sonne; Planet; umkreist, innersterPlanet$

- nichtleere Menge
  $D_S = \{UnsreSonne, Merkur, Venus, Erde, Mars\}$
- Funktion $I(innersterPlanet)$: $UnsreSonne \to Merkur$
- Relationen: $I(Sonne) = \{UnsreSonne\}$.
  $I(umkreist) =$
  $\{(Merkur, UnsreSonne), (Venus, UnsreSonne),$
  $(Erde, UnsreSonne), (Mars, UnsreSonne)\}$
- usw.

innerster Planet (Erde) =

Variablenbelegung: z.B. bei Formeln und Auswertung:
x kann mit allen Objekten in D belegt werden:
$\forall x : Sonne(x) \Rightarrow umkreist(innersterPlanet(x), x)$

Semantik: Interpretation – Erweiterung auf Terme

Fortsetzung auf Terme: $I(t)$ ordnet Term t ein Element aus D_S zu:

- $I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_S(I(t_1), \ldots, I(t_n))$
- $I(x) = I_V(x)$

Erweiterung der Interpretation auf Formeln

Interpretation von Formeln (gegeben $I = ((D_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{P}_S), I_V)$)

$I(\texttt{false}) = 0$ und $I(\texttt{true}) = 1$

$$I(Q(t_1, \ldots t_n)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in Q_S \\ 0, & \text{falls } (I(t_1), \ldots, I(t_n)) \not\in Q_S \end{cases}$$

$$I(\neg F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(F) = 0 \\ 0, & \text{falls } I(F) = 1 \end{cases}$$

$$I(F \vee G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(F) = 1 \text{ oder } I(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \wedge G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(F) = 1 \text{ und } I(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \implies G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(F) = 0 \text{ oder } I(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \iff G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(F) = I(G) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erweiterung der Interpretation auf Formeln (2)

Formalismus $\qquad$ I' $\qquad$ Erklärung

$$I(\forall x : F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I[a/x](F) = 1 \text{ für alle } a \in D_S \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x : F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I[a/x](F) = 1 \text{ für ein } a \in D_S \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Notation dabei: $I[a/x] = \begin{cases} I(y), & \text{falls } y \neq x \\ a & \text{falls } y = x \end{cases}$

für alle $a \in D_S$

$\forall\ a \in D_S$ ...

Termalgebra

Termalgebra

Für eine Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ und Menge von Variablen V sei F_T die Menge der Funktionen

$$F_T = \{f_\Sigma \mid f \in \mathcal{F}, arity(f) = n, f_\Sigma(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n)\})$$

Dann nennt man $(T(\Sigma, V), F_T)$ die **Termalgebra** über der Signatur Σ.

Semantik: Modelle, Tautologien, ...

Modell einer PL_1-Formel F:

Interpretation I mit $I(F) = 1$

Schreibweise $I \models F$

Semantik: Modelle, Tautologien, ...

Modell einer PL_1-Formel F:
Interpretation I mit $I(F) = 1$
Schreibweise $I \models F$

$(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\forall y.\ P(y))$

Eine PL_1-Formel heißt:

- **allgemeingültig**, wenn sie in allen Interpretationen gültig ist.
- **erfüllbar**, wenn sie von einer Interpretation erfüllt wird, d.h. es gibt I mit $I \models F$.

  Sonne(Merkur)
- **unerfüllbar (widersprüchlich)**, wenn sie von keiner Interpretation erfüllt wird.

  Sonne(Merkur) $\wedge \neg$ Sonne(M)
- **falsifizierbar**, wenn sie in einer Interpretation falsch wird.

Sonne(Merkur)

Semantik: Modelle, Tautologien, ...

Modell einer PL_1-Formel F:
Interpretation I mit $I(F) = 1$
Schreibweise $I \models F$

Eine PL_1-Formel heißt:

- **allgemeingültig**, wenn sie in allen Interpretationen gültig ist.
- **erfüllbar**, wenn sie von einer Interpretation erfüllt wird, d.h. es gibt I mit $I \models F$.
- **unerfüllbar (widersprüchlich)**, wenn sie von keiner Interpretation erfüllt wird.
- **falsifizierbar**, wenn sie in einer Interpretation falsch wird.

Tautologie, Satz: allgemeingültige, geschlossene PL_1-Formel

Zusammenhänge

Auch in PL_1 gilt:

- Eine Formel F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ unerfüllbar
- Falls F nicht allgemeingültig ist: F ist erfüllbar gdw. $\neg F$ erfüllbar

Beispiele

Jede Interpretation macht 0-stelliges Prädikat P wahr oder falsch:

allgemeingültig: $P \lor \neg P$ 1

unerfüllbar $P \land \neg P$ 0

Beispiele

Jede Interpretation macht 0-stelliges Prädikat P wahr oder falsch:

allgemeingültig: $P \vee \neg P$
unerfüllbar $P \wedge \neg P$

Formel $\forall x.P(x)$ erfüllbar und falsifizierbar:

- Sei $I = (I_V, (\underbrace{\{0,1\}}_{D_S}), \mathcal{F}_S, \underbrace{\{P_S = \{0,1\}\}}_{\mathcal{P}_S})$

$I(\forall x : P(x)) = 1$ gdw. $I[0/x](P(x)) = 1$ und $I[1/x](P(x)) = 1$

$I[0/x](P(x)) \quad = \quad I[0/x](x) \in P_S \quad = \quad 0 \in P_S \quad = 1$

$I[1/x](P(x)) \quad = \quad I[1/x](x) \in P_S \quad = \quad 1 \in P_S \quad = 1$

D.h $I \models \forall x.P(x)$

$\rightarrow$ keine Tautologie

Beispiele

Jede Interpretation macht 0-stelliges Prädikat P wahr oder falsch:

allgemeingültig: $P \lor \neg P$
unerfüllbar $P \land \neg P$

Formel $\forall x.P(x)$ erfüllbar und falsifizierbar:

- Sei $I = (I_V, (\underbrace{\{0,1\}}_{D_S}), \mathcal{F}_S, \underbrace{\{P_S = \{0,1\}\}}_{\mathcal{P}_S})$
  $I(\forall x : P(x)) = 1$ gdw. $I[0/x](P(x)) = 1$ und $I[1/x](P(x)) = 1$
  $I[0/x](P(x)) \;=\; I[0/x](x) \in P_S \;=\; 0 \in P_S \;= 1$
  $I[1/x](P(x)) \;=\; I[1/x](x) \in P_S \;=\; 1 \in P_S \;= 1$
  D.h $I \models \forall x.P(x)$
- Sei $I = (I_V, (\underbrace{\{0,1\}}_{D_S}), \mathcal{F}_S, \underbrace{\{P_S = \{0\}\}}_{\mathcal{P}_S})$
  $I(\forall x : P(x)) = 1$ gdw. $I[0/x](P(x)) = 1$ und $I[1/x](P(x)) = 1$
  $I[0/x](P(x)) \;=\; I[0/x](x) \in P_S \;=\; 0 \in P_S \;= 1$
  $I[1/x](P(x)) \;=\; I[1/x](x) \in P_S = 1 \in P_S \;= 0$
  D.h $I(\forall x : P(x)) = 0$