Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung

Allens Zeitintervalllogik

Prof. Dr M. Schmidt-Schauß

SoSe 2018

Stand der Folien: 5. Juli 2018

Schließen über Zeit

- Darstellung und Inferenzen für zeitliche Zusammenhänge
- Viele verschiedene Logiken
- z.B. Modallogiken und Temporallogiken.
  Diese sprechen über Ereignisse in der Zukunft / Vergangenheit und haben Existenzquantoren und haben oft exakte Zeitdauern.

Wir betrachten die

Allensche Intervall-Logik

Beispiel: Käse-Sahne-Kuchen backen

Zutaten besorgen	Teig zubereiten	Teig ruhen lassen	Belag zubereiten
Sahne schlagen	Backform einfetten	Teig in Backform	Belag in Backform
Ofen heizt	Kuchen im Ofen	Kuchen kühlt aus	Kuchen entnehmen

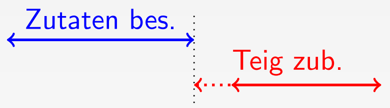
Zeitliche Zusammenhänge

Zutaten besorgen	Teig zubereiten	Teig ruhen lassen	Belag zubereiten	Sahne schlagen	Backform einfetten
Teig in Backform	Belag in Backform	Ofen heizt	Kuchen im Ofen	Kuchen kühlt aus	Kuchen entnehmen

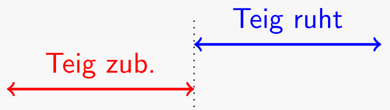
- Aktionen entsprechen (nicht-leeren) **Zeitintervallen**
- Wissen: Anforderungen an die **relative** Lage der Intervalle
- Wie kann man dieses Wissen **repräsentieren**?

Beispiele

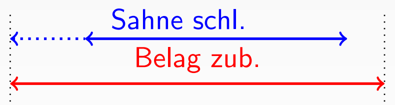
Zutaten besorgen	vor	**Teig zubereiten**



Teig ruhen lassen	direkt nach	**Teig zubereiten**



Sahne schlagen	während, aber vorher endend	**Belag zubereiten**



Belag zubereiten	beginnt während	**Teig ruhen lassen**

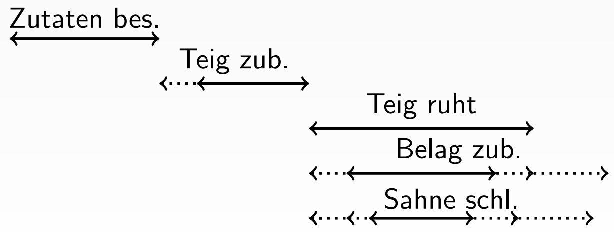
Welche Schlüsse lassen sich daraus ziehen?

- Neue Beziehungen zwischen Aktionen

  Darf der Belag vor dem Teig in die Form?
- Modell: Anordnung der Intervalle, die alle Beziehungen erfüllt

  Wie gelingt der Kuchen?
- Konsistenz: Gibt es ein Modell?

  Kann man den Kuchen überhaupt backen?



Allensche Intervalllogik

James F. Allen:

Maintaining knowledge about temporal intervals

Commun. ACM, 1983

- Keine Darstellung von Zeitpunkten, sondern:
- Darstellung von Zeitintervallen
- ohne Absolutwerte (weder von wann bis wann noch wie lang)
- sondern: nur die relative Lage von Intervallen

Formeln und Basisrelationen

Allensche Formeln:

$$F ::= (A\ r\ B) \mid \neg F \mid F_1 \vee F_2 \mid F_1 \wedge F_2$$

wobei

- A, B sind Intervallnamen
- r ist eine der Allenschen Basisrelationen

Basisrelationen: Gegeben zwei nichtleere reellwertige Intervalle:

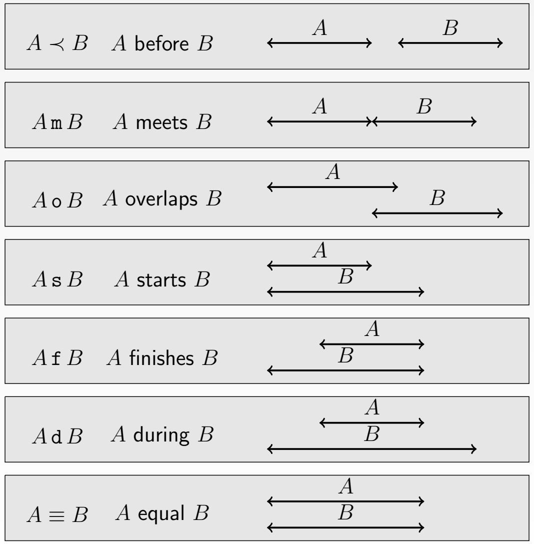
- Wie können A und B zueinander liegen?
- Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Allensche Basisrelationen

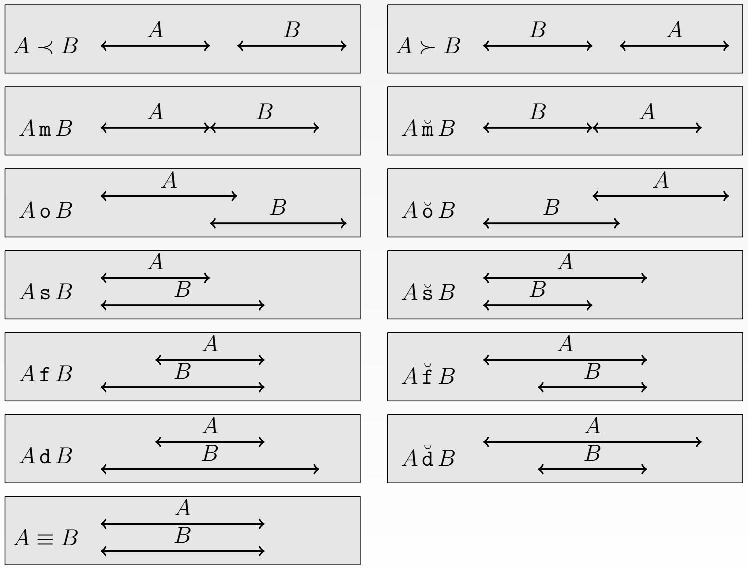
Bedingung	*Abkürzung*	*Bezeichnung*
$A_e < B_a$	$\prec$	A before B
$A_e = B_a$	$\mathtt{m}$	A meets B
$A_a < B_a < A_e < B_e$	$\mathtt{o}$	A overlaps B
$A_a = B_a < A_e < B_e$	$\mathtt{s}$	A starts B
$B_a < A_a < A_e = B_e$	$\mathtt{f}$	A finishes B
$B_a < A_a < A_e < B_e$	$\mathtt{d}$	A during B
$B_a = A_a, A_e = B_e$	$\equiv$	A equal B

- und inverse Relationen (ohne $\equiv$)
- Inverse: $\breve{r}$ ist inverse Relation zu r
- Ausnahme (in der Schreibweise): $\succ$ inverses zu $\prec$
- und $\equiv = \breve{\equiv}$

Allensche Basisrelationen, Teil 1



Alle Allensche Basisrelationen



Allensche Basisrelationen

Allensche Basisrelationen

Die 13 Allenschen Basis-Relationen sind:

$$\mathcal{R} := \{\equiv, \prec, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \succ, \breve{\mathtt{m}}, \breve{\mathtt{o}}, \breve{\mathtt{s}}, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}\}.$$

Satz

Die Allenschen Basis-Relationen sind paarweise disjunkt, d.h.

$$A\ r_1\ B \wedge A\ r_2\ B \implies r_1 = r_2.$$

Schreibweise

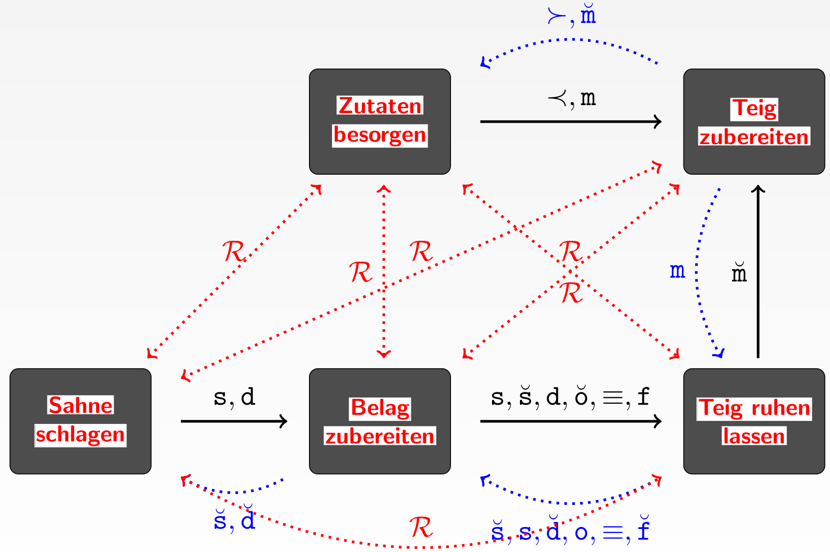
$$A\{r_1, \ldots, r_n\}B := (A\ r_1\ B) \vee (A\ r_2\ B) \ldots \vee (A\ r_n\ B)$$

$A\{r_1, \ldots, r_n\}B$ nennt man **atomares Allen-Constraint**

Beispiele

Zutaten besorgen	vor	Teig zubereiten	Zutaten $\{\prec, \mathtt{m}\}$ TeigZub
Teig ruhen lassen	direkt nach	Teig zubereiten	TeigR $\{\breve{\mathtt{m}}\}$ TeigZub
Sahne schlagen	während, aber vorher endend	Belag zubereiten	Sahne $\{\mathtt{s}, \mathtt{d}\}$ BelagZub
Belag zubereiten	beginnt während	Teig ruhen lassen	BelagZub $\{\mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \breve{\mathtt{o}}, \equiv, \mathtt{f}\}$ TeigR

Beispiel als Constraintnetzwerk



Allensche Formeln: Semantik

Interpretation I:
bildet Intervallnamen auf Intervalle $[a, b]$ ab,
wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Interpretation von atomaren Aussagen $A\ r\ B$:
Sei $I(A) = [A_a, A_e]$ und $I(B) = [B_a, B_e]$.

- $I(A \prec B) = 1$, gdw. $A_e < B_a$
- $I(A\ \mathtt{m}\ B) = 1$, gdw. $A_e = B_a$
- $I(A\ \mathtt{o}\ B) = 1$, gdw. $A_a < B_a$, $B_a < A_e$ und $A_e < B_e$
- $I(A\ \mathtt{s}\ B) = 1$, gdw. $A_a = B_a$ und $A_e < B_e$
- $I(A\ \mathtt{f}\ B) = 1$, gdw. $A_a > B_a$ und $A_e = B_e$
- $I(A\ \mathtt{d}\ B) = 1$, gdw. $A_a > B_a$ und $A_e < B_e$
- $I(A \equiv B) = 1$, gdw. $A_a = B_a$ und $A_e = B_e$
- $I(A\ \breve{r}_0\ B) = 1$, gdw. $I(B\ r_0\ A) = 1$
- $I(A \succ B) = 1$, gdw. $I(B \prec A) = 1$

Allensche Formeln: Semantik (2)

Interpretation von Allenschen Formeln:

$I(F \wedge G) = 1$	gdw.	$I(F) = 1$ und $I(G) = 1$
$I(F \vee G) = 1$	gdw.	$I(F) = 1$ oder $I(G) = 1$.
$I(\neg F) = 1$	gdw.	$I(F) = 0$
$I(F \iff G) = 1$	gdw.	$I(F) = I(G)$
$I(F \Rightarrow G) = 1$	gdw.	$I(F) = 0$ oder $I(G) = 1$

D.h.: wie üblich

Modelle und Erfüllbarkeit

Interpretation I ist ein **Modell** für F gdw. $I(F) = 1$ gilt.

Eine Allensche Formel F ist:

- **widersprüchlich** (inkonsistent), wenn es kein Modell für F gibt.
- **allgemeingültig**, wenn jede Interpretation ein Modell für F ist.
- **erfüllbar**, wenn es mindestens ein Modell für F gibt.

Zwei Formeln F und G sind **äquivalent** gdw. $\forall I : I(F) = I(G)$

Semantische Folgerung: $G \models F$ gdw. $\forall I : I(G) = 1 \Rightarrow I(F) = 1$

Disjunktionen von atomaren Formeln

- Zur Erinnerung: $A\ S\ B$ mit $S \subseteq \mathcal{R}$ nennen wir atomares Allen-Constraint
- Z.B.: Statt $A \prec B \lor A \texttt{ s } B \lor A \texttt{ f } B$ schreiben wir $A\ \{\prec, \texttt{s}, \texttt{f}\}\ B$
- Beachte: Es gibt 2^{13} solche Mengen S.
- Auch erlaubt: $A\ \emptyset B$, Semantik: $I(A\ \emptyset\ B) = 0$.
- $A\ \mathcal{R}\ B$ bedeutet: alles ist möglich, $I(A\ \mathcal{R}\ B) = 1$.

Vereinfachungsregeln für Allensche Formeln

- Ein atomare Aussage der Form $A\ r\ A$ kann man immer vereinfachen zu $0, 1$:
  - $A\ r\ A \ \rightarrow\ 0$, wenn $r \neq \equiv$ und
  - $A\ \equiv\ A\ \rightarrow\ 1$.
- Negationszeichen kann man nach innen schieben.
- Eine Formel $\neg(A\ R\ B)$ kann man zu $A\ (\mathcal{R} \setminus R)\ B$ umformen.
- Unterformeln der Form $A\ R_1\ B \land A\ R_2\ B$ kann man durch $A\ (R_1 \cap R_2)\ B$ ersetzen.
- Unterformeln der Form $A\ R_1\ B \lor A\ R_2\ B$ kann man durch $A\ (R_1 \cup R_2)\ B$ ersetzen.
- atomare Formeln der Form $A\ \emptyset\ B$ kann man durch 0 ersetzen.
- atomare Formeln der Form $A\ \mathcal{R} B$ kann man durch 1 ersetzen.
- Alle aussagenlogischen Umformungen sind erlaubt.

Vereinfachungen (2)

Theorem

Jede Vereinfachungsregel für Allensche Formeln erhält die Äquivalenz, d.h. wenn $F \rightarrow F'$, dann sind F und F' äquivalente Formeln.

Beweis: Verwende die Semantik

Allensche Constraints

Mit den Vereinfachungen kann jede Allensche Formel umgeformt werden in ein

Disjunktives Allen-Constraint

- (konjunktives) Allen-Constraint:
  Eine Konjunktion von atomaren Allen-Constraints:
  $A_1\ S_1\ A_2 \wedge \ldots \wedge A_n\ S_n\ A_n$
- Disjunktives Allen-Constraint:
  Disjunktion von (konjunktiven) Allen-Constraints

Weniger geht nicht: Z.B. nicht vereinfachbar: $A \preceq B \vee C \preceq D$

Allenscher Kalkül

- Eingabe: Allen-Constraint
- Ausgabe: Weitere Beziehungen die daraus folgen, bzw. 0 (Widerspruch) oder 1 (Tautologie)
- Es reicht im Grunde: Konjunktive Allen-Constraints
- Bei disjunktiven Allen-Constraints:
  bearbeite die konjunktiven Allen-Constraints unabhängig und füge dann zusammen.

Allenscher Kalkül (2)

Wesentliche Regel: „Transitivitätsregel“

- Aus $A \prec B \wedge B \prec C$ kann man $A \prec C$ folgern.
- Aus $A \prec B \wedge C \prec B$ kann man nichts neues über die Beziehung zwischen A und C folgern (alles ist möglich)

Allenscher Kalkül (3)

Wie folgert man genau?

- Basisrelationen r_1, r_2: $A\ r_1\ B \wedge B\ r_2\ C$.
  Man braucht die Komposition $(r_1 \circ r_2)$, als kleinste Menge mit: $A\ r_1\ B \wedge B\ r_2\ C \models A(r_1\ \circ\ r_2)C$.
  Beachte:$(r_1 \circ r_2)$ ist nicht unbedingt eine Basisrelation
- $R_1, R_2 \subseteq \mathcal{R}$: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C$.
  Komposition der Mengen: Sei $R_1 \circ R_2$ gerade die (kleinste) Menge mit: $AR_1B \wedge BR_2C \models A(R_1\ \circ\ R_2)C$.

Kompositionsmatrix

	$\prec$	$\succ$	d	$\breve{d}$	o	$\breve{o}$	m	$\breve{m}$	s	$\breve{s}$	f	$\breve{f}$
$\prec$	$\prec$	$\mathcal{R}$	$\prec$ o m d s	$\prec$	$\prec$	$\prec$ o m d s	$\prec$	$\prec$ o m d s	$\prec$	$\prec$	$\prec$ o m d s	$\prec$
$\succ$	$\mathcal{R}$	$\succ$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	$\succ$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	$\succ$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	$\succ$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	$\succ$	$\succ$	$\succ$
d	$\prec$	$\succ$	d	$\mathcal{R}$	$\prec$ o m d s	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	$\prec$	$\succ$	d	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ d f	d	$\prec$ o m d s
$\breve{d}$	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	$\mathcal{R} \setminus \prec \succ$ m $\breve{m}$	$\breve{d}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\breve{d}$	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	$\breve{d}$
o	$\prec$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o d s	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\prec$ o m	$\mathcal{R} \setminus \prec \succ$ m $\breve{m}$	$\prec$	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o	$\breve{d}$ $\breve{f}$ o	d s o	$\prec$ o m
$\breve{o}$	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}$ d f	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	$\mathcal{R} \setminus \prec \succ$ m $\breve{m}$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}$ d f	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$	$\breve{o}$	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$
m	$\prec$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o d s	$\prec$	$\prec$	o d s	$\prec$	$\equiv$ f $\breve{f}$	m	m	d s o	$\prec$
$\breve{m}$	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}$ d f	$\succ$	$\breve{o}$ d f	$\succ$	$\equiv$ s $\breve{s}$	$\succ$	d f $\breve{o}$	$\succ$	$\breve{m}$	$\breve{m}$
s	$\prec$	$\succ$	d	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\prec$ o m	$\breve{o}$ d f	$\prec$	$\breve{m}$	s	$\equiv$ s $\breve{s}$	d	$\prec$ o m
$\breve{s}$	$\prec$ o m $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}$ d f	$\breve{d}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\breve{o}$	o $\breve{d}$ $\breve{f}$	$\breve{m}$	$\equiv$ s $\breve{s}$	$\breve{s}$	$\breve{o}$	$\breve{d}$
f	$\prec$	$\succ$	d	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o d s	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$	m	$\succ$	d	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$	f	$\equiv$ f $\breve{f}$
$\breve{f}$	$\prec$	$\succ$ $\breve{o}$ $\breve{m}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o d s	$\breve{d}$	o	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	m	$\breve{o}$ $\breve{d}$ $\breve{s}$	o	$\breve{d}$	$\equiv$ f $\breve{f}$	$\breve{f}$

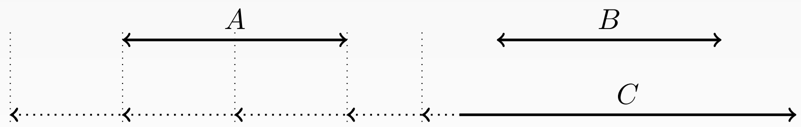
Nur 12×12-Matrix, da:
$r \circ \equiv \ = \ r \ = \ \equiv \circ r$

Kompositionsmatrix

Die Einträge muss/kann man per Hand ausrechnen.

Beispiel: $\prec \ \circ \ \mathtt{d}$

Betrachte alle möglichen Lagen für $A \prec B \wedge B \ \mathtt{d} \ C$



Möglichkeiten: $A \ \{\prec, \mathtt{o}, \mathtt{m}, \mathtt{s}, \mathtt{d}\} \ C$.

Komposition der Mengen

Beispiel: Aus $A \ \{\mathtt{m}, \mathtt{d}\} \ B \wedge B \ \{\mathtt{f}, \mathtt{d}\} \ C$ kann man schließen

$$\begin{aligned} & A \ (\mathtt{m} \circ \mathtt{f} \cup \mathtt{m} \circ \mathtt{d} \cup \mathtt{d} \circ \mathtt{f} \cup \mathtt{d} \circ \mathtt{d}) \ C \\ = \ & A \ \{\mathtt{d}, \mathtt{s}, \mathtt{o}\} \cup \{\mathtt{d}, \mathtt{s}, \mathtt{o}\} \cup \{\mathtt{d}\} \cup \{\mathtt{d}\} \ C \\ = \ & A \ \{\mathtt{d}, \mathtt{s}, \mathtt{o}\} \ C \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

Satz

Seien $r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_k$ Allensche Basisrelationen. Dann gilt

$$\{r_1, \ldots, r_k\} \circ \{r'_1, \ldots, r'_k\} = \bigcup \{r_i \circ r'_j \mid i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, k'\}$$

Inverse für Mengen

Inversion für Mengen von Basisrelationen

Sei $S = \{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq \mathcal{R}$. Dann sei

$$\breve{S} = \{\breve{r_1}, \ldots, \breve{r_k}\}.$$

Beachte. Es gilt: $\breve{\breve{r}} = r$

Damit gilt:

Satz

Für $S \subseteq \mathcal{R}$ gilt: $A \ S \ B$ und $B \ \breve{S} \ A$ sind äquivalente Allensche Formeln.

Satz

$\breve{\cdot}(r_1 \circ r_2) = \breve{r_2} \circ \breve{r_1}$.

Allenscher Abschluss für Konjunktive Allen-Constraints

Eingabe: Konjunktives Allen-Constraint

Ausgabe: Allenscher Abschluss

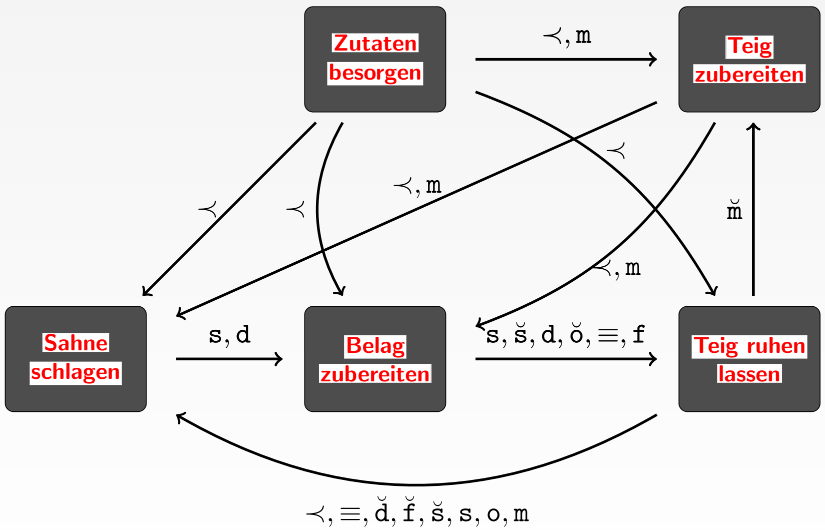
Verfahren: Berechne Fixpunkt bezüglich der Regeln (auf Subformeln):

- Vereinfachungen: (→ bedeutet „ersetze“)
  - $A\ R_1\ B \wedge A\ R_2\ B \to A\ (R_1 \cap R_2)\ B$
  - $A\ \emptyset\ B \to \texttt{False}$
  - $A\ \mathcal{R}\ B \to 1$
  - $A\ R\ A \to 0$, wenn $\equiv \notin R$.
  - $A\ R\ A \to 1$, wenn $\equiv \in R$.
- Folgerungen: (⇝ bedeutet „füge hinzu“)
  - $A\ R\ B \rightsquigarrow B\ \breve{R}\ A$, wobei $\breve{R} := \{\breve{r_1}, \dots, \breve{r_n}\}$ für $R = \{r_1, \dots, r_n\}$
  - $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$.
- und übliche aussagenlogische Umformungen

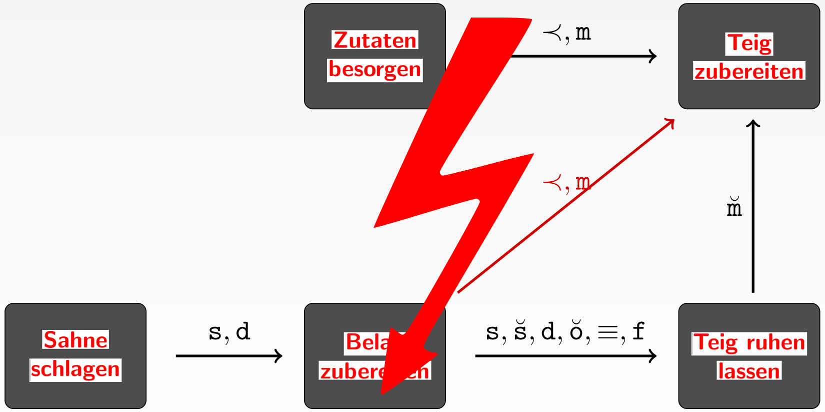
Allenscher Abschluss für alle Allen-Constraints

- Für konjunktive Allensche Constraints: Wende die Regeln des Allenschen Kalküls solange an, bis sich keine neuen Beziehungen mehr herleiten lassen (Fixpunkt)
- Disjunktive Constraints: Wende Fixpunktiteration auf jede Komponente an, und vereinfache anschließend
  - Komponente $= 1$: Disjunktiver Constraint ist äquivalent zu 1
  - Komponente $= 0$: Kann gestrichen werden
  - Alle Komponenten $= 0$: Disjunktiver Constraint widersprüchlich (Inkonsistenz)

Beispiel



Beispiel (2)



Korrektheit, Vollständigkeit

Wir sagen, der Allen-Kalkül ist

- **korrekt**, wenn bei $F \to F'$ stets gilt: F und F' sind äquivalente Formeln
- **herleitungs-vollständig**, wenn er für jedes konjunktive Constraint alle semantisch folgerbaren Einzel-Relationen herleiten kann.
- **widerspruchs-vollständig**, wenn er für jedes konjunktive Constraint herausfinden kann, ob es widersprüchlich ist (Herleitung der 0)

Fragestellungen

- Wie aufwändig ist die Berechnung des Abschlusses der Allenschen Relationen?
- Ist der Allen-Kalkül korrekt?
- Ist die Berechnung herleitungs- bzw- widerspruchs-vollständig?
- Was ist die Komplexität der Logik und der Herleitungsbeziehung, evtl. für eingeschränkte Eingabeformeln?
- Wie kann man den Allenschen Kalkül für aussagenlogische Kombinationen von Intervallformeln verwenden?

Implementierung der Allen-Vervollständigung

- Wesentliche Regel: Transitivitätsregel
  $A\ R_1\ B \land B\ R_2\ C \to A\ R_1 \circ R_2\ C.$
- Konjunktive Allen-Constraints (schon zusammengefasst, Intervalle $A_1, \ldots, A_n$):

$$\bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} A_i\ R_{i,j}\ A_j$$

  Nicht vorhandene Relation werden auf $\mathcal{R}$ gesetzt.
- Abschluss kann mit einer $n \times n$-Tabelle gemacht werden
- Sobald $\emptyset$ irgendwo auftaucht, kann man abbrechen
- Ähnlich zum Warshall-Algorithmus
- Bei disjunktiven Allen-Constraints: bearbeite die Allen-Constraints separat und fasse dann zusammen.

Beispiel für das Eingabearray

$$\text{Zutaten } \{\prec, \mathtt{m}\} \text{ TeigZub}$$
$$\land$$
$$\text{TeigRuht } \{\breve{\mathtt{m}}\} \text{ TeigZub}$$
$$\land$$
$$\text{Sahne } \{\mathtt{s}, \mathtt{d}\} \text{ Belagzub}$$
$$\land$$
$$\text{Belagzub } \{\equiv, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \breve{\mathtt{o}}\} \text{ TeigRuht}$$

$R_{i,j}$	(1) Zutaten	(2) Teigzub	(3) TeigRuht	(4) Sahne	(5) Belagzub
(1) Zutaten	$\{\equiv\}$	$\{\prec, \mathtt{m}\}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
(2) Teigzub	$\{\succ, \breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{m}\}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
(3) TeigRuht	$\mathcal{R}$	$\{\breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{o}\}$
(4) Sahne	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{d}, \mathtt{s}\}$
(5) Belagzub	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \breve{\mathtt{o}}\}$	$\{\breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{s}}\}$	$\{\equiv\}$

Beispiel für die Completion

$$\text{Zutaten } \{\prec, \mathtt{m}\} \text{ TeigZub}$$
$$\wedge$$
$$\text{TeigRuht } \{\breve{\mathtt{m}}\} \text{ TeigZub}$$
$$\wedge$$
$$\text{Sahne } \{\mathtt{s}, \mathtt{d}\} \text{ Belagzub}$$
$$\wedge$$
$$\text{Belagzub } \{\equiv, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \breve{\mathtt{o}}\} \text{ TeigRuht}$$

Vervollständigung: (Vorführung)

$R_{i,j}$	Zutaten	Teigzub	TeigRuht	Sahne	Belagzub
(1) Zutaten	$\{\equiv\}$	$\{\prec, \mathtt{m}\}$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
(2) Teigzub	$\{\succ, \breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{m}\}$	$\{\succ, m\}$	$\{\succ, m\}$
(3) TeigRuht	$\succ$	$\{\breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\{\succ, \equiv, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\}$	$\{\equiv, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\}$
(4) Sahne	$\succ$	$\{\succ, \breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv, \succ, \breve{\mathtt{m}}, \breve{\mathtt{o}}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \mathtt{s}\}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{d}, \mathtt{s}\}$
(5) Belagzub	$\succ$	$\{\succ, \breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv, \breve{\mathtt{o}}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \mathtt{s}\}$	$\{\breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{s}}\}$	$\{\equiv\}$

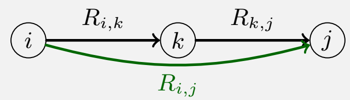
Algorithmus 1

Algorithmus **Allenscher Abschluss, Variante 1**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

Algorithmus:

```
repeat
  change := False;
  for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      for k := 1 to n do
        R' := R_{i,j} ∩ (R_{i,k} ∘ R_{k,j});
        if R_{i,j} ≠ R' then
          R_{i,j} := R';
          change := True;
        endif
      endfor
    endfor
  endfor
until change=False
```



Erläuterung

$$R' := R_{i,j} \cap (R_{i,k} \circ R_{k,j})$$

entspricht gerade

$$
\begin{array}{ll}
 & A_i\ R_{i,k}\ A_k \wedge A_k\ R_{k,j}\ A_j\ \ \wedge\ \ A_i\ R_{i,j}\ A_j \\
\to & A_i\ R_{i,k}\ A_k \wedge A_k\ R_{k,j}\ A_j \wedge A_i\ R_{i,k} \circ R_{k,j}\ A_j \wedge A_i\ R_{i,j}\ A_j \\
\to & A_i\ R_{i,k}\ A_k \wedge A_k\ R_{k,j}\ A_j \wedge A_i\ (R_{i,k} \circ R_{k,j}) \cap R_{i,j}\ A_j
\end{array}
$$

Eigenschaften Algorithmus 1

- Ähnlich zu Warshall-Algorithmus, aber iteriert (notwendig!)
- solange bis Fixpunkt erreicht ist
- Korrekt: Offensichtlich

Laufzeit: Im worst-case $O(n^5)$

Begründung:

- 3 `for`-Schleifen: $O(n^3)$
- `repeat`-Schleife: Im schlechtesten Fall wird ein $R_{i,j}$ um eins verkleinert
- pro $R_{i,j}$ maximal 13 Verkleinerungen
- Es gibt n^2 Mengen $R_{i,j}$
- Daher: `repeat`-Schleife wird maximal $O(n^2)$ mal durchlaufen
- ergibt: $O(n^5)$

Algorithmus 2

Algorithmus **Allenscher Abschluss, Variante 2**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

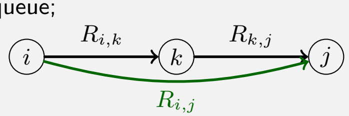
Algorithmus:

queue := $\{(i,k,j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq n\}$;

while queue $\neq \emptyset$ **do**

  Wähle und entferne Tripel (i,k,j) aus queue;

  $R' := R_{i,j} \cap (R_{i,k} \circ R_{k,j})$;



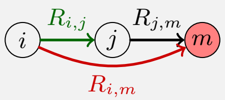
  if $R_{i,j} \neq R'$ **then**

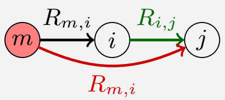
    $R_{i,j} := R$;

    queue := queue ++ $\{(i,j,m) \mid 1 \leq m \leq n\}$ ++ $\{(m,i,j) \mid 1 \leq m \leq n\}$

  endif

endwhile





Eigenschaften Algorithmus 2

Korrektheit: Bei Änderung von $R_{i,j}$ werden alle Nachbarn, die evtl. neu berechnet werden müssen, in queue eingefügt

Laufzeit:

- Am Anfang: queue enthält n^3 Tripel
- `while`-Schleife entfernt pro Durchlauf ein Element aus queue
- Einfügen in queue in der Summe:
  - $R_{i,j}$ kann höchstens 13 mal verändert werden.
  - D.h. höchstens $n^2 * 13$ mal wird eingefügt
  - Einmal einfügen: $2 * n$ Tripel werden hinzugefügt

  Insgesamt: Es werden höchstens $13 * 2 * n * n^2$ Tripel zu queue hinzugefügt
- Ergibt $O(n^3)$ Durchläufe der while-Schleife

  (von denen maximal $O(n^2)$ Durchläufe $O(n)$ Laufzeit verbrauchen und die restlichen $O(n)$ in konstanter Laufzeit laufen)

Algorithmus 2 hat worst-case-Laufzeit $O(n^3)$

Allenscher Kalkül: Korrektheit

Korrektheit

Der Allensche Kalkül ist korrekt, d.h. wenn $F \to F'$, dann sind F und F' äquivalente Formeln

Beweis (Skizze): Verwende die Semantik

- Aussagenlogische Umformungen: klar
- $A\ R_1\ B \wedge A\ R_2\ B$ ist äquivalent zu $A\ (R_1 \cap R_2)\ B$:

  Sei $R_1 = \{r_1, \ldots, r_k\}$, $R_2 = \{r'_1, \ldots, r'_{k'}\}$.

$$
\begin{array}{ll}
 & A\ R_1\ B \wedge A\ R_2\ B \\
= & (\bigvee A r_i B)\ \wedge\ (\bigvee A\ r'_{i'}\ B) \\
\sim & \bigvee\{(A\ r_i\ B) \wedge (A\ r'_{i'}\ B) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq i' \leq k'\} \text{ (ausmultiplizieren)} \\
\sim & \bigvee\{(A\ r_i\ B) \wedge (A\ r'_{i'}\ B) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq i' \leq k', r_i = r'_{i'}\} \text{ (Basisrelationen disjunkt)} \\
= & A\ (R_1 \cap R_2)\ B
\end{array}
$$

- $A\ \emptyset\ B \sim 0$ und $A\ \mathcal{R}\ B \sim 1$ (klar)

Allenscher Kalkül: Korrektheit (2)

Beweis (Fortsetzung)

- $A\ R\ A$ ist äquivalent zu 0, wenn $\equiv \not\in R$ und

  $A\ R\ A$ ist äquivalent zu 1, wenn $\equiv \in R$:

  Jede Interpretation bildet $I(A)$ eindeutig auf ein Intervall ab.

-Transitivitätsregel:

  Basisrelationen: Man muss die Korrektheit der Matrix prüfen.
  Für mehrelementige Mengen:

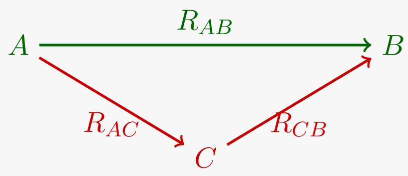
$$
\begin{array}{ll}
 & A\ \{r_1, \ldots, r_k\}\ B \wedge B\ \{r'_1, \ldots, r'_{k'}\}\ C \\
= & (A\ r_1\ B \vee \ldots \vee A\ r_k\ B) \wedge (B\ r'_1\ C \vee \ldots \vee B\ r'_{k'}\ C) \text{ (ausmultiplizieren)} \\
\sim & \bigvee\{(A\ r_i\ B \wedge B\ r'_{i'}\ C) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq i' \leq k'\} \text{ (Basis)} \\
\sim & \bigvee\{(A\ r_i\ B \wedge B\ r'_{i'}\ C \wedge A\ r_i \circ r'_{i'}\ C) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq i' \leq k'\} \\
\sim & A\ \{r_1, \ldots, r_k\}\ B \wedge B\ \{r'_1, \ldots, r'_{k'}\}\ C \wedge \bigvee\{(A\ r_i \circ r'_{i'}\ C) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq i' \leq k'\} \\
= & A\ \{r_1, \ldots, r_k\}\ B \wedge B\ \{r'_1, \ldots, r'_{k'}\}\ C \wedge A\ \{r_1, \ldots, r_k\} \circ \{r'_1, \ldots, r'_{k'}\}\ C
\end{array}
$$

Partielle Vollständigkeit

Der Allensche Kalkül ist vollständig in eingeschränktem Sinn:

Satz (Pfadkonsistenz)

Der Allensche Abschluss ist 3-konsistent:



Jede Belegung I der Intervalle A und B mit $I(A\ R_{AB}\ B) = \texttt{True}$ kann auf das Intervall C erweitert werden, so dass $I(A\ R_{BC}\ C) = \texttt{True} = I(C\ R_{AC}\ B)$.

Es gilt **nicht** (globale Konsistenz):

Jede Belegung von k Knoten kann auf $k+1$ Knoten unter Erhaltung der Erfüllbarkeit erweitert werden

Unvollständigkeit des Allen-Kalküls

Leider gilt:

Theorem

Der Allensche Kalkül ist nicht herleitungs-vollständig.

Beweis: Gegenbeispiel: Für den Allenschen Constraint:

$$D\ \{\texttt{o}\}\ B \wedge D\ \{\texttt{s},\texttt{m}\}\ C \wedge D\ \{\texttt{s},\texttt{m}\}\ A \wedge A\ \{\texttt{d},\breve{\texttt{d}}\}\ B \wedge C\ \{\texttt{d},\breve{\texttt{d}}\}\ B$$

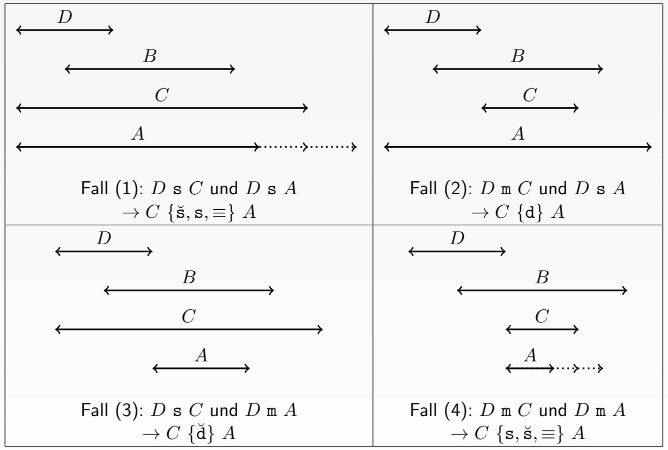
ist der Allensche Abschluss:

$$D\ \{\texttt{o}\}\ B \wedge D\ \{\texttt{s},\texttt{m}\}\ C \wedge D\ \{\texttt{s},\texttt{m}\}\ A \wedge A\ \{\texttt{d},\breve{\texttt{d}}\}\ B \wedge C\ \{\texttt{d},\breve{\texttt{d}}\}\ B \\ \wedge C\ \{\texttt{s},\breve{\texttt{s}},\equiv,\texttt{o},\breve{\texttt{o}},\texttt{d},\breve{\texttt{d}},\texttt{f},\breve{\texttt{f}}\}\ A$$

Aber in diesem Fall ist $C\ \{\texttt{f},\breve{\texttt{f}},\texttt{o},\breve{\texttt{o}}\}\ A$ nicht möglich (nächste Folie)

Beweis (Fortsetzung)

- Die Lage von B zu D ist eindeutig.
- Möglichkeiten wie A zu D und C zu D: 4 Fälle



$C\ \{\texttt{f},\breve{\texttt{f}},\texttt{o},\breve{\texttt{o}}\}\ A$ nicht möglich!

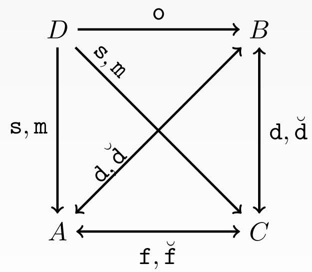
Unvollständigkeit des Allen-Kalküls (2)

Ebenso gilt:

Theorem

Der Allensche Kalkül ist nicht widerlegungsvollständig.

Beweis: Gegenbeispiel: Leichte Abwandlung des Beispiels davor
Füge $A\ \{f,\breve{f}\}\ C$ hinzu, d.h. man erhält das Constraintnetzwerk:



Allenscher Abschluss: Verändert das Netzwerk nicht, aber es ist widersprüchlich!

Konsequenzen der Unvollständigkeit

Frage: Ist Allen-Constraint F widersprüchlich?

- Abschluss $=$ 0, dann JA
- Abschluss $=$ 1, dann NEIN
- Abschluss weder 0 noch 1: man weiß nichts

Frage: Ist Allen-Constraint F erfüllbar?

- Abschluss $=$ 0, dann NEIN
- Abschluss $=$ 1, dann JA (Tautologie)
- Abschluss weder 0 noch 1: man weiß nichts

Eindeutige Allen-Constraints

Definition

Ein Allensches Constraint nennt man eindeutig, wenn für alle Paare A, B von Intervallkonstanten gilt: Das Constraint enthält genau eine Beziehung $A\ r\ B$, wobei r eine der dreizehn Basisrelationen ist.

Es gilt:

Satz

Der Allensche Abschluss eines eindeutigen Allenschen Constraints F ist entweder 0, oder wiederum F.

Beweis: Jede Transitivitätsregelanwendung leitet $\emptyset$ her, oder lässt Eintrag unverändert.

Eindeutige Allen-Constraints (2)

Satz (Valdés-Pérez, 1987)

Ein eindeutiges Allensches Constraint ist erfüllbar, gdw. der Allensche Kalkül bei Vervollständigung das Constraint nicht verändert, d.h. wenn es ein Fixpunkt ist.

Beweisidee: Zeige, wenn Allen-Kalkül kein Widerspruch entdeckt, dann ist Constraint erfüllbar.
Es gibt dann eine totale Ordnung der Intervallenden

Korollar

Auf eindeutigen Allen-Constraints ist der Allen-Kalkül korrekt und vollständig

Eindeutige Allen-Constraints: Menge

Zu jedem Allenschen Constraint C kann man die **Menge aller zugehörigen eindeutigen Allenschen Constraints** D definieren, wobei gelten muss:
Wenn $A\ r\ B$ in D vorkommt und $A\ R\ B$ in C, dann gilt $r \in R$.

Lemma

Ein Allen-Constraint ist erfüllbar, gdw. es ein zugehöriges eindeutiges Constraint gibt, das erfüllbar ist.

Beweis: Klar

Vollständiges Verfahren

Algorithmus **Erfüllbarkeitstest für konjunktive Allensche Constraints**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$
Ausgabe: `True` (Widerspruch) oder `False` (erfüllbar)

function AllenSAT(R):
  $R' :=$ AllenAbschluss(R);
  if $\exists R'_{i,j}$ mit $R'_{i,j} = \emptyset$ **then return** `True` **endif**;// Widerspruch
  if $\forall R'_{i,j}$ gilt: $|R'_{i,j}| = 1$ **then return** `False` // eindeutig und erfüllbar
  else
    wähle $R'_{i,j}$ mit $R'_{i,j} = \{r_1, r_2, \ldots\}$;
    $R^l := R'$; $R^l_{i,j} := \{r_1\}$;// kopiere R' und setze (i,j) auf r_1
    $R^r := R'$; $R^r_{i,j} := R'_{i,j} \setminus \{r_1\}$;// kopiere R' und setze (i,j) auf $r_2, \ldots$
    return (ASAT(R^l) $\wedge$ ASAT(R^r));
  endif

Der Algorithmus ist korrekt und vollständig. Die Laufzeit ist im worst-case **exponentiell**. Mittlere Verzweigungsrate: 6,5

Komplexität des Problems

Satz

Das Erfüllbarkeitsproblem für konjunktive Allenschen Constraints ist $\mathcal{NP}$**-vollständig**.

Beweis:

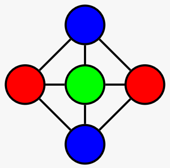
Problem ist in $\mathcal{NP}$:

- Rate lineare Reihenfolge der Intervallanfänge und -enden
- D.h. Ordnung auf allen X_a, X_e für alle Intervalle X
- Verifiziere ob Reihenfolge das Constraint erfüllt
- Verifikation geht in Polynomialzeit

Beweis (Fortsetzung)

$\mathcal{NP}$-Härte:
Reduktion von 3-Färbbarkeit auf
Erfüllbarkeit von Allen-Constraints

3-Färbbarkeit:
Kann man die Knoten eines ungerichteten Graphen mit drei Farben färben, so dass benachbarte Knoten stets verschiedene Farben haben?

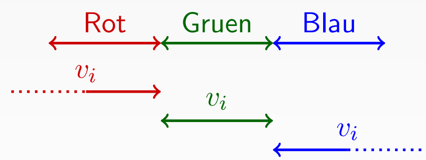


Beweis (Fortsetzung)

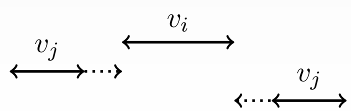
Für $G = (V, E)$ erzeuge:

- (Rot $\mathtt{m}$ Gruen) $\wedge$ (Gruen $\mathtt{m}$ Blau)

- Für die Knoten: $\forall v_i \in V : v_i \ \{\mathtt{m}, \equiv, \breve{\mathtt{m}}\}$ Gruen



- Für die Kanten: $\forall (v_i, v_j) \in E : \ v_i \ \{\mathtt{m}, \breve{\mathtt{m}}, \prec, \succ\} \ v_j$



Beweis (Fortsetzung)

Daher gilt: Der Graph ist dreifärbbar, gdw. die Allenschen Relationen erfüllbar sind. Die Zuordnung ist:

- v_i hat Farbe grün gdw. $v_i \equiv$ Gruen
- v_i hat Farbe rot gdw. v_i $\mathtt{m}$ Gruen
- v_i hat Farbe blau gdw. v_i $\breve{\mathtt{m}}$ Gruen

Übersetzung ist in Polynomialzeit durchführbar, daher Erfüllbarkeit $\mathcal{NP}$-Hart

Folgerungen

- Jeder vollständige Algorithmus braucht Exponentialzeit. (unter Annahme $\mathcal{NP} = EXPTIME$)
- Die polynomielle Allen-Vervollständigung **muss** unvollständig sein

Varianten

Es gibt polynomielle, vollständige Verfahren für

Allensche Constraints mit **eingeschränkter Syntax**

Eine haben wir bereits gesehen:

- Eindeutige Allen-Constraints

Varianten (2)

Neue Variante:

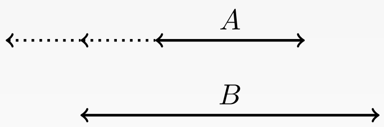
- Erlaube nur Allensche Relationen, so dass:
- Übersetzung in Bedingungen über die Endpunkte nur Konjunktionen von der Form $x < y$ oder $x = y$
- Dann gilt: Man braucht keine Fallunterscheidung

Passender Satz von Relationen:

- Alle Basisrelationen,
- $\{\mathtt{d}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\}$, und $\{\breve{\mathtt{o}}, \mathtt{f}, \mathtt{d}\}$ und deren Konverse. d.h. $\{\breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{o}}, \breve{\mathtt{s}}\}$, und $\{\mathtt{o}, \breve{\mathtt{f}}, \breve{\mathtt{d}}\}$.

Varianten (3)

Z.B. $A\{\mathtt{d}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\}B$ als Ungleichung über den Endpunkten:



Wenn $A = [A_a, A_e], B = [B_a, B_e]$, dann entspricht obige Relation gerade

$$A_a < A_e, B_a < B_e, A_e < B_e, B_a < A_e$$

Varianten (4)

Auf solchen Constraints kann man Erfüllbarkeit in Polynomialzeit testen

- Transitiver Abschluss der Endpunktbeziehungen
- anschließend lineare Reihenfolge mit topologischem Sortieren

Es gilt aber sogar

Satz (Nebel, Bürckert, 1995)

Auf den so eingeschränkten Allen-Constraints ist der Allensche Kalkül korrekt und vollständig.

Hintergrund

Diese spezielle Klasse lässt sich als Grund-Hornklauseln darstellen, d.h. Klauseln mit maximal einem positiven Literal.

Für Grund-Hornklauselmengen ist Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit testbar.

Man hat Fakten in der Form $a < b$ und $c = d$, wobei a, b, c, d unbekannte Konstanten sind. Es gibt auch Hornklauseln, die von der Symmetrie und Transitivität stammen:

$$\begin{array}{lcl}
x < y \wedge y < z & \Rightarrow & x < z \\
x = y \wedge y = z & \Rightarrow & x = z \\
x = y & \Rightarrow & y = x \\
x < y \wedge y = z & \Rightarrow & x < z \\
x = y \wedge y < z & \Rightarrow & x < z
\end{array}$$

Hintergrund (2)

Man kann weitere Allensche Constraints zulassen, und behält die Vollständigkeit des Allen-Kalküls:

- Alle Constraints deren Übersetzung in Constraints über Endpunkten Hornklauseln ausschließlich mit Literalen $a \leq b$, $a = b$ und $\neg(a = b)$ erzeugt.
- Von den $2^{13} = 8192$ möglichen Beziehungen erfüllen 868 diese Eigenschaft

Man kann diese auch für die Fallunterscheidung des exponentiellen Verfahrens verwenden.

Vorteil: Kleinere mittlere Verzweigungsrate
(Statt 6,5 nur 2,533 (Nebel 1997))

Kuchen backen

Zutaten besorgen	Teig zubereiten	Teig ruhen lassen	Belag zubereiten	Sahne schlagen	Backform einfetten
Teig in Backform	Belag in Backform	Ofen heizt	Kuchen im Ofen	Kuchen kühlt aus	Kuchen entnehmen

```
Zutaten  {<,m}   TeigZub,  Zutaten  {<,m}         TeigRuht,   Zutaten  {<,m}     BelZub,
Zutaten  {<,m}   Sahne,    TeigRuht {m}           TeigForm,   TeigForm {<,m}     BelForm,
BelForm  {<,m}   Backen,   Backen   {f}           Heizen,     Sahne    {s,d}     BelZub,
Heizen   {S,o,>} TeigRuht, Heizen   {<,m}         Kuehlen,    Kuehlen  {<,m}     Entnehmen,
Zutaten  {<,m}   Einfett,  Zutaten  {<,m}         Heizen,     TeigZub  {<,m}     TeigForm,
BelZub   {<,m}   BelForm,  TeigZub  {<,>,m,M}     BelZub,     Einfett  {<,>,m,M} BelZub,
Einfett  {>,M}   TeigZub,  Einfett  {<,m,M,>}     TeigForm,   Einfett  {<,>,m,M} BelForm,
Einfett  {<,m}   TeigForm, TeigZub  {m}           TeigRuht,   Einfett  {>,M}     Zutaten,
Backen   {m}     Kuehlen,  BelZub   {s,S,d,O,=,f} TeigRuht,   Einfett  {>}       Sahne
```

Allen-Programm:

```
Max. #Modelle in der Eingabe      : 177.247.393.995.618.482.069.389.150.242.626.279.322.671.526.463.930.368
Max. #Modelle nach Allen-Abschluss: 5.898.240

Anzahl Modelle                    : 1.536
Allenscher Abschluss genau?       : True
```


Ausblick

Qualitatives räumliches Schließen

- Eindimensional: Genau die Allensche Intervalllogik
- Zweidimensional: Region-Connection-Calculus (RCC8), (Randell, Cui & Cohn, 1992)